Zbiór wartości funkcji

Zbiór wartości funkcji

Źródło: Olaf Pictures, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Znamy już definicję funkcji, potrafimy określać jej dziedzinę oraz obliczać jej wartość w danym punkcie. Kolejnym stopniem, który mamy do pokonania, to wyznaczanie zbioru wartości funkcji. Z ilu elementów może składać się zbiór wartości funkcji? Od czego zależy liczba elementów zbioru wartości funkcji? Czy zbiór wartości funkcji może być zbiorem jednoelementowym? Na te i podobne pytania uzyskasz odpowiedź analizując zagadnienia przedstawione w tym materiale.

Twoje cele

- Wyznaczysz zbiór wartości funkcji, gdy funkcja będzie opisana za pomocą grafu, tabelki, wykresu, zbioru par uporządkowanych, wzoru.
- Sprawdzisz, czy podana liczba jest wartością danej funkcji.
- Udowodnisz, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji.

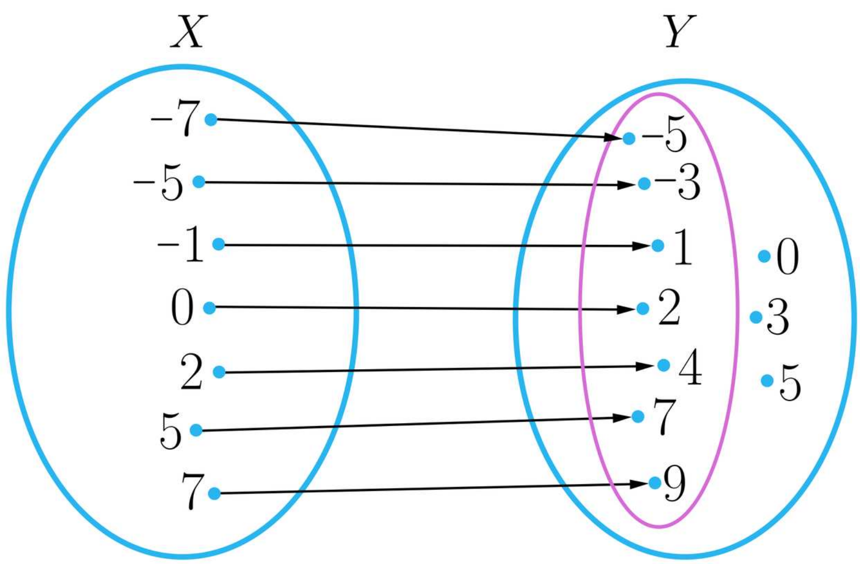
Przeczytaj

Zbiór wartości funkcji liczbowej, to zbiór wszystkich tych liczb, które można otrzymać w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów.

Wiemy, że funkcję możemy opisać różnymi sposobami. Przeanalizujemy sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji, gdy jest ona opisana za pomocą grafu, tabelki, zbioru par uporządkowanych, wzoru, wykresu lub jest opisana słownie.

Przykład 1

Wyznaczmy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą grafu.



$f\colon X \to Y$

Rozwiązanie

Z budowy grafu wiemy, że w lewej części, oznaczonej literą X, umieszczone są argumenty funkcji. Zbiór argumentów nazywamy dziedziną funkcji.

Prawa część grafu, oznaczona literą Y, zawiera elementy przeciwdziedziny. To właśnie wśród elementów przeciwdziedziny szukamy zbioru wartości funkcji.

W przypadku rozpatrywanej funkcji zbiór wartości funkcji stanowią liczby $\{-5,\ -3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 9\}$.

Możemy zapisać to symbolicznie:

$ZW_f = \{-5,\ -3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 9\}$

Analizując graf możemy zauważyć, że zbiór wartości funkcji jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji f.

Przykład 2

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą tabelki.

x	-2	$-1\frac{1}{5}$	-1	0	$\frac{1}{4}$	$0,89$	1	2
$f(x)$	0	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	1	$\sqrt{2}$	$1,5$	$1,7$	$\sqrt{3}$	2

Rozwiązanie

Tabelka zbudowana jest w ten sposób, że w pierwszym wierszu umieszczamy argumenty funkcji f, czyli elementy dziedziny funkcji, a w drugim wierszu odpowiadające podanym argumentom wartości funkcji.

Zbiór wartości funkcji f tworzą liczby umieszczone w drugim wierszu, co możemy zapisać symbolicznie:

$$ZW_f = \left\{0;\ \frac{2\sqrt{5}}{5};\ 1;\ \sqrt{2};\ 1,5;\ 1,7;\ \sqrt{3};\ 2\right\}.$$

Przykład 3

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$$\left\{\left(-4,\ \frac{15}{16}\right),\ \left(-3,\ \frac{7}{8}\right),\ \left(-2,\ \frac{3}{4}\right),\ \left(-1,\ \frac{1}{2}\right),\ (0,\ 0),\ (1,\ -1),\ (2,\ -3),\ (3,\ -7)\right\}$$

Rozwiązanie

Uporządkowaną parę liczb tworzymy w sposób następujący:

- liczba zapisana z lewej strony, zwana również poprzednikiem, jest liczbą należącą do dziedziny funkcji;
- liczba zapisana po prawej stronie, zwana również następnikiem, to odpowiadająca poprzednikowi wartość funkcji.

Aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji, należy „zebrać” wszystkie następniki z każdej pary.

Możemy zapisać to symbolicznie:

$$ZW_f = \left\{-7,\ -3,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16}\right\}.$$

Przykład 4

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f przedstawionej za pomocą opisu słownego.

Funkcja f każdej liczbie naturalnej x, takiej, że $x \in \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 6.

Rozwiązanie

Funkcja f określona jest na zbiorze $\{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\}$.

Obliczymy jej wartości dla wszystkich elementów.

$f(10) = 4$

$f(11) = 5$

$f(12) = 0$

$f(13) = 1$

$f(14) = 2$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

$f(17) = 5$

$f(18) = 0$

$f(19) = 1$

$f(20) = 2$

Zatem zbiór wartości funkcji f, to

$ZW_f = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Przykład 5

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru. Rozpatrzymy dwa przypadki:

a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2+5}$, gdy $x \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$,

b) $f(x) = 2^{x+1}$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Ad a)

Funkcja f określona jest na zbiorze $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Obliczymy jej wartości dla poszczególnych argumentów.

$f(-3)=\frac{-3+4}{9+5}=\frac{1}{14}$

$f(-2)=\frac{-2+4}{4+5}=\frac{2}{9}$

$f(-1)=\frac{-1+4}{1+5}=\frac{1}{2}$

$f(0)=\frac{0+4}{0+5}=\frac{4}{5}$

$f(1)=\frac{1+4}{1+5}=\frac{5}{6}$

$f(2)=\frac{2+4}{4+5}=\frac{2}{3}$

$f(3)=\frac{3+4}{9+5}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

Zatem zbiór wartości funkcji f możemy zapisać symbolicznie:

$ZW_f=\left\{\frac{1}{14},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}\right\}$.

Ad b)

Funkcja $f(x)=2^{x+1}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wynika stąd, że jej zbiorem wartości będą wszystkie liczby rzeczywiste będące wartościami liczbowymi wyrażenia 2^{x+1}.

Z własności potęgowania wiemy, że gdy podstawa potęgi jest liczbą dodatnią, to wartość potęgi też jest liczbą dodatnią.

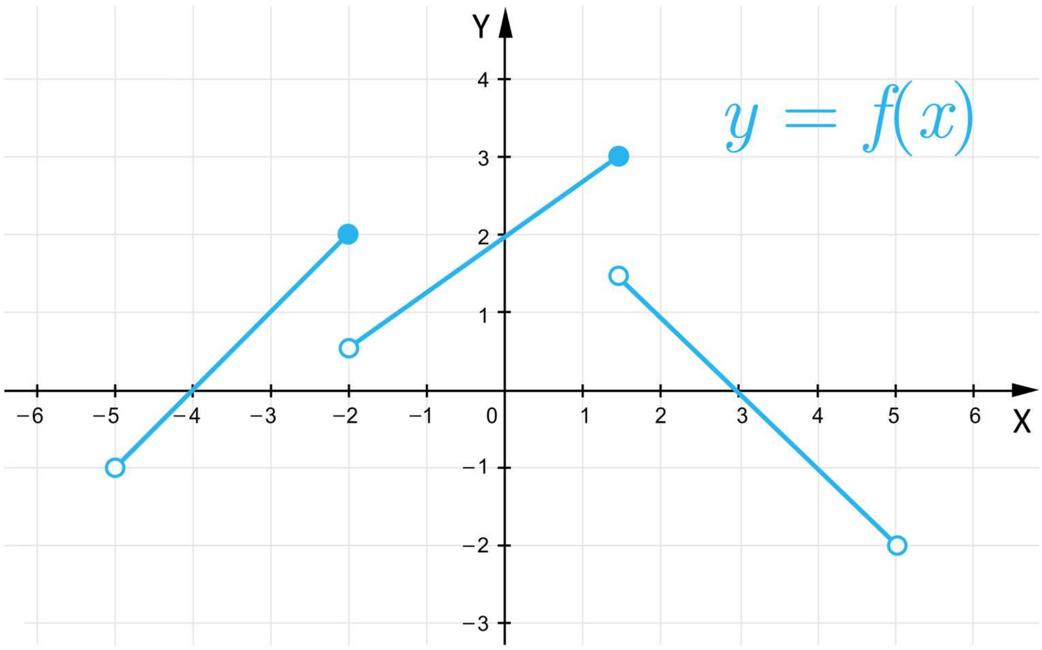
Do dziedziny funkcji należą wszystkie liczby rzeczywiste, zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Symbolicznie możemy zapisać:

$ZW_f=\mathbb{R}_+$.

Przykład 6

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą wykresu.



Rozwiązanie

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wykresu postępujemy w sposób następujący:

- wyobraźmy sobie prostą równoległą do osi X.
- przesuwajmy ją od najniżej położonego punktu na wykresie funkcji.
- gdy prosta przetnie się z wykresem funkcji, rzutujemy ten punkt na oś Y.
- postępujemy tak do wyczerpania się miejsc przecięcia wykresu i prostej.
- zaznaczony na osi Y przedział jest zbiorem wartości funkcji.

Korzystając z powyższego sposobu, wyznaczymy zbiór wartości funkcji podanej w treści przykładu.

Wydaje się, że najniżej położonym punktem jest punkt, którego rzędna jest równa (-2).

Punkt ten jednak nie należy do wykresu funkcji.

W związku z tym zbiór wartości funkcji będzie lewostronnie otwarty.

Najwyżej położonym punktem należącym do wykresu funkcji jest punkt, którego rzędna jest równa 3.

Oznacza to, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-2,\ 3\rangle$.

Możemy zapisać to symbolicznie:

$ZW_f = (-2,\ 3\rangle$.

Pokazaliśmy sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji w zależności od sposobu opisu funkcji.

> **Ważne!**
>
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą grafu, zbiór wartości funkcji odczytujemy najczęściej z prawej części grafu.
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą tabelki, to zbiór wartości funkcji zapisany jest w jej drugim wierszu.
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych, to do zbioru wartości funkcji należą te elementy z każdej pary, które są zapisane na drugim miejscu.
> - Jeżeli funkcja przedstawiona jest za pomocą opisu słownego, a jej dziedzina jest zbiorem kilkuelementowym, to wykorzystując warunki podane w treści opisu, obliczamy wartości funkcji dla podanych argumentów.
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wzoru i ma dziedzinę skończoną, to zbiór wartości funkcji wyznaczamy obliczając wartości funkcji dla każdego z argumentów.
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wzoru i jej dziedzina jest zbiorem nieskończonym, to zbiór wartości tak określonej funkcji wyznaczamy korzystając z własności działań zapisanych we wzorze.
> - Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wykresu, to zbiór wartości tej funkcji wyznaczamy rzutując prostopadle punkty należące do wykresu na oś Y.

Słownik

> **zbiór wartości funkcji liczbowej**
>
> to zbiór wszystkich tych liczb, które są wartościami funkcji dla wszystkich jej argumentów

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie materiał przedstawiony w animacji. Wykorzystując poniższe informacje zaproponuj sposób wyznaczania zbioru wartości funkcji f opisanej za pomocą wzoru, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem nieskończonym.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16vOHuxV

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego zbioru wartości funkcji.

Polecenie 2

Wyznacz zbiór wartości funkcji f opisanej za pomocą tabelki.

x	$-5,35$	$-3,46$	$-0,26$	$1,25$	$2,58$	$3,57$
$f(x)$	-6	-4	-1	1	2	3

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru:

$f(x) = \frac{x-3}{3x}$, gdy $x \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6\}$

Wyznacz zbiór wartości tej funkcji i oblicz wartość wyrażenia $3 \cdot [f(-1)]^2 + 4 \cdot [f(6)]^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

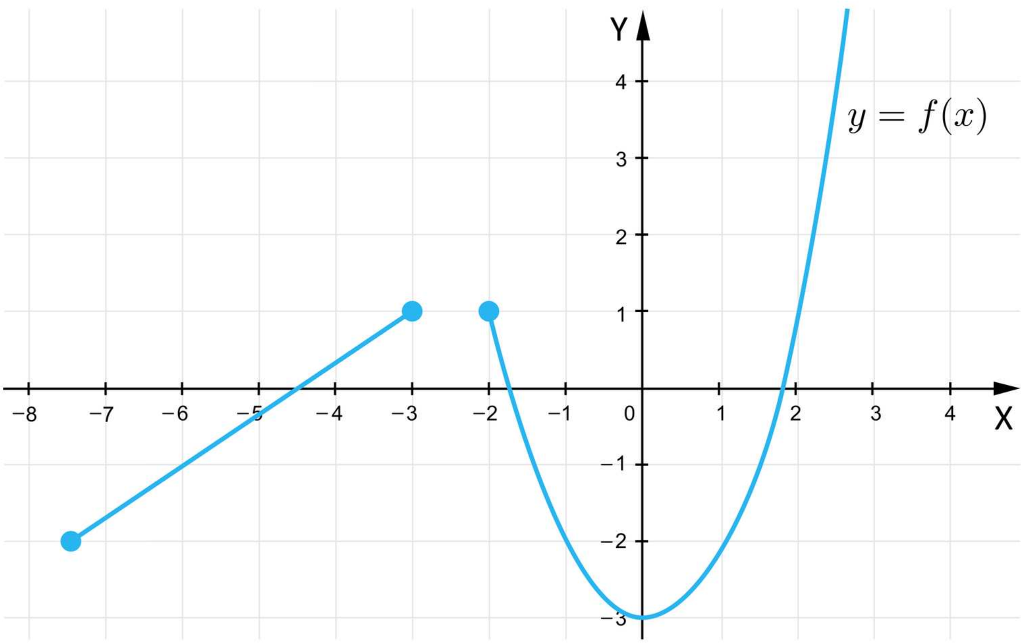
Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zbiór wartości funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł informacji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza zbiór wartości funkcji, gdy funkcja jest opisana za pomocą grafu, tabelki, wykresu, zbioru par uporządkowanych lub wzoru
- sprawdza, czy podana liczba może być wartością funkcji
- uzasadnia, że podana liczba jest elementem zbioru wartości funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metaplan
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przed lekcją grupa chętnych uczniów przygotowuje krótką prezentację multimedialną przypominającą definicję funkcji liczbowej i sposobów jej przedstawiania.
2. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
3. Uczniowie oglądają prezentację przygotowaną przez swoich kolegów. Jest ona wprowadzeniem do lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i omawiają sposoby wyznaczania wartości funkcji. Następnie, podzieleni na dwie grupy, dzielą się informacjami i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie tworzą metaplan zawierający sposoby określania zbioru wartości funkcji w zależności od sposobu opisu tej funkcji.
4. Uczniowie oglądają animację i rozwiązują wskazane polecenia.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Zadanie dla chętnych:
   Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = -2 \cdot |x| + x$, gdy $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz jej zbiór wartości.

Materiały pomocnicze:

Argumenty i wartości funkcji

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy metodą odwróconej klasy.