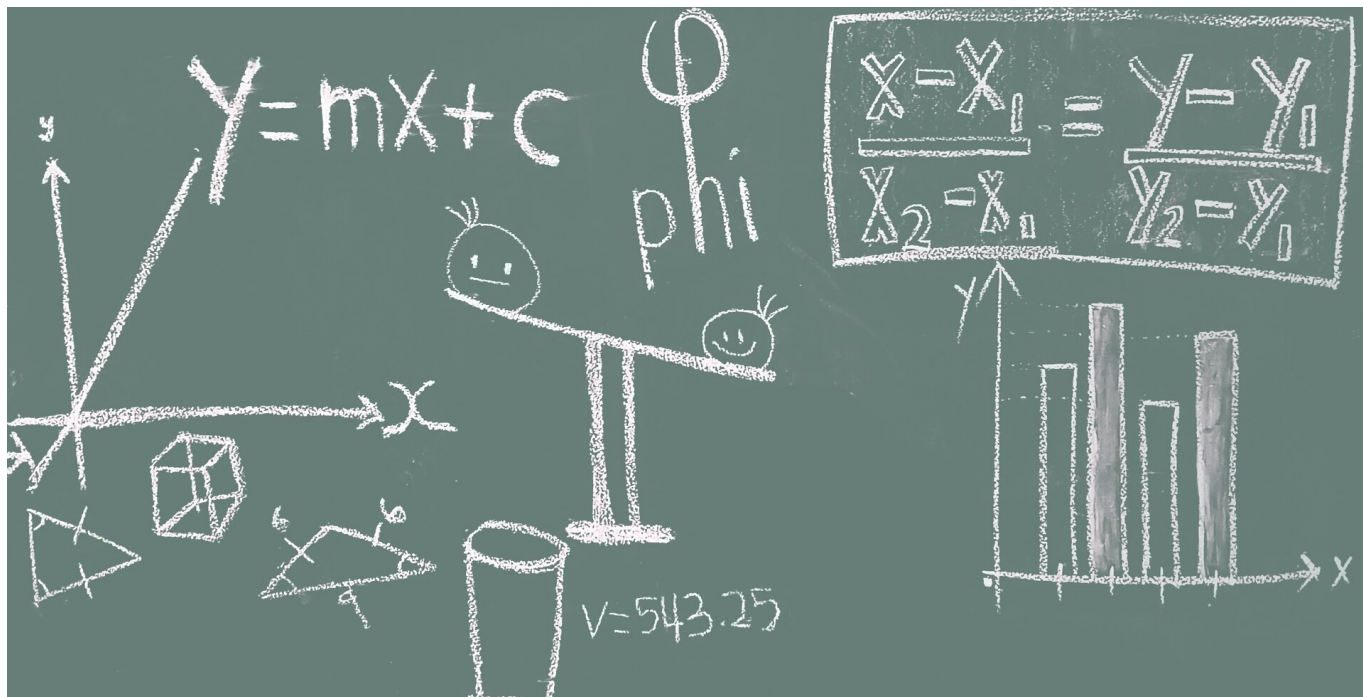




Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego?

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jednym z podstawowych pojęć w teorii ciągów jest granica. Aby dobrze zrozumieć czym jest granica ciągu, warto posłużyć się pojęciem otoczenia punktu, które to zostało przedstawione w poprzednim temacie oraz zwrotem „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”. W tym temacie dowiemy się, co oznacza zwrot „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego” i jaki jest jego związek z otoczeniem punktu na osi liczbowej. W kolejnych tematach będziemy używać tego sformułowania, aby lepiej zrozumieć, czym jest granica ciągu nieskończonego.

Twoje cele

- Dowiesz się, co oznacza sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”.
- Zaobserwujesz, jaki jest związek otoczenia punktu ze zwrotem „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”.
- Wskażesz dla danego ciągu nieskończonego zbiory, do których należą prawie wszystkie jego wyrazy.

Przeczytaj

Co to znaczy „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”?

Przy formułowaniu pojęcia granicy ciągu wykorzystuje się często zwrot „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”. Zwrot ten stosuje się jedynie do ciągów nieskończonych, tzn. takich które posiadają nieskończenie wiele wyrazów. W związku z tym w dalszym ciągu będziemy mówić po prostu „prawie wszystkie wyrazy ciągu” pamiętając, że ciąg ten musi być ciągiem nieskończonym. Mówiąc najprościej zwrot „prawie wszystkie wyrazy ciągu” oznacza wszystkie jego wyrazy poza skończoną ich ilością. Aby dobrze zrozumieć to sformułowanie przyjrzyjmy się poniższym przykładom.

Przykład 1

Rozważmy ciąg, który składa się ze wszystkich liczb naturalnych: $1, 2, 3, 4, \dots$. Ciąg taki możemy zapisać wzorem

$$a_n = n.$$

Jeżeli usuniemy z tego ciągu kilka jego początkowych wyrazów, np. a_1, a_2, a_3 , to otrzymamy ciąg $4, 5, 6, 7, \dots$. Ten nowo otrzymany ciąg składa się z prawie wszystkich wyrazów ciągu (a_n) , gdyż nie zawiera jedynie trzech jego wyrazów a_1, a_2, a_3 . Podobnie jeśli wzięlibyśmy pod uwagę ciąg

$$1, 2, 3, \dots, 100, 1000, 1001, 1002, \dots$$

Powyższy ciąg zawiera wszystkie wyrazy ciągu (a_n) za wyjątkiem wyrazów $101, 102, 103, \dots, 999$. Wyrazów tych jest dokładnie 899 a zatem ilość skończona. Stąd możemy powiedzieć, że rozważany ciąg zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , tzn. wszystkie poza skończoną ilością (która w tym przypadku jest równa 899).

Spójrzmy na kolejny przykład

Przykład 2

Rozważmy następujący ciąg

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

Ciąg ten możemy zapisać wzorem $a_n = 2n$. Jest to ciąg, który składa się ze wszystkich liczb naturalnych parzystych. Każdy wyraz tego ciągu jest też oczywiście wyrazem ciągu $a_n = n$, który z kolei składa się ze wszystkich liczb naturalnych. Jednak ciąg $2, 4, 6, 8, \dots$ nie zawiera żadnej liczby nieparzystej, które też są wyrazami ciągu $a_n = n$. Stąd wynika,

że ciąg $a_n = 2n$ pomimo tego, że zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $a_n = n$ (tzn. wszystkie liczby naturalne parzyste) nie zawiera prawie wszystkich jego wyrazów, gdyż nie zawiera liczb nieparzystych, których jest nieskończenie wiele.

Spostrzeżenia z powyższych przykładów możemy zapisać w postaci następującej definicji.

Definicja: prawie wszystkie wyrazy ciągu

Niech dany będzie ciąg (a_n) oraz pewien zbiór $A \subset \mathbb{R}$. Powiemy, że do zbioru A należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , jeśli istnieje co najwyżej skończona liczba wyrazów ciągu (a_n) , które nie należą do zbioru A .

Spójrzmy na kolejny przykład ilustrujący powyższą definicję.

Przykład 3

Rozważmy ciąg

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1\frac{1}{2}, \quad a_3 = 1\frac{1}{3}, \quad a_4 = 1\frac{1}{4}, \quad a_5 = 1\frac{1}{5}.$$

Sprawdźmy do których z podanych niżej zbiorów należą prawie wszystkie wyrazy danego ciągu.

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 2), \quad C = \langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \rangle, \quad D = \langle \frac{6}{5}, 2 \rangle$$

Na początek zauważmy, że dany ciąg jest ciągiem malejącym, gdyż dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, mamy

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = a_n.$$

Wynika stąd, że największym wyrazem tego ciągu jest wyraz $a_1 = 2$. Wnioskujemy stąd, że $a_n \leq 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z drugiej strony

$$1 < 1 + \frac{1}{n} = a_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Reasumując możemy powiedzieć, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(1, 2)$.

- $A = (0, 1)$.

Ponieważ przedział A jest rozłączny z przedziałem $(1, 2)$ więc nie należy do niego żaden wyraz ciągu (a_n) . W szczególności zatem nie należą do niego prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) .

- $B = (1, 2)$.

Zauważmy, że do przedziału B nie należy tylko pierwszy wyraz naszego ciągu, który jest równy 2. Zatem do przedziału B należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu (wszystkie poza pierwszym).

- $C = \langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \rangle$.

Do przedziału C nie należą wyrazy $a_1 = 2, a_2 = 1\frac{1}{2}, a_3 = 1\frac{1}{3}$. Wyraz $a_4 = 1\frac{1}{4}$ należy już do przedziału C . Ponieważ nasz ciąg jest malejący oraz wszystkie jego wyrazy są większe od 1 więc wyrazy $a_5, a_6, a_7, \dots$ również należą do przedziału C . Oznacza to, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału C (w tym przypadku wszystkie poza pierwszymi trzema).

- $D = \langle \frac{6}{5}, 2 \rangle$.

Do przedziału D należą wyrazy $a_1 = 2, a_2 = 1\frac{1}{2}, a_3 = 1\frac{1}{3}, a_4 = 1\frac{1}{4}, a_5 = 1\frac{1}{5}$.

Ponieważ $a_6 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \notin D$ oraz ciąg (a_n) jest malejący więc kolejne wyrazy $(a_7, a_8, \dots)$ również nie należą do przedziału D . Zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) nie należą do przedziału D (gdyż należy do niego tylko pięć pierwszych wyrazów).

Prawie wszystkie wyrazy ciągu i otoczenie punktu

W poprzednim temacie omawialiśmy pojęcie **otoczenia punktu**. Okazuje się, że pojęcie to wraz z pojęciem prawie wszystkich wyrazów ciągu prowadzi do bardzo ciekawych obserwacji. Spójrzmy na poniższy przykład.

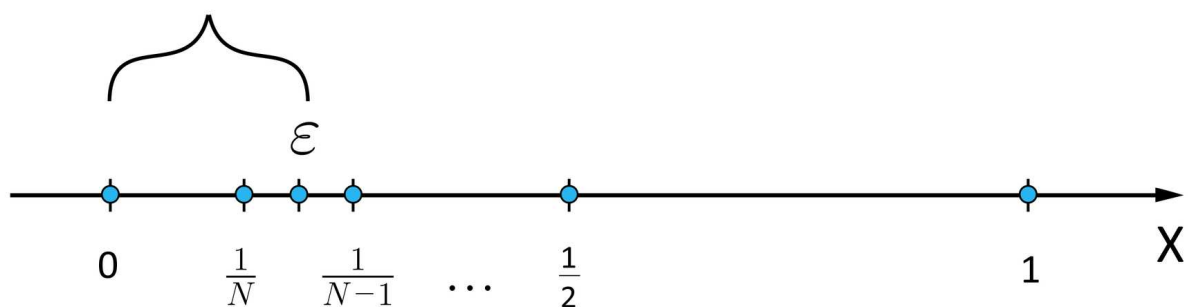
Przykład 4

Rozważmy ciąg

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Weźmy dowolne **otoczenie liczby** 0, tzn. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x - 0| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną, ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Zbiór ten można zapisać w postaci przedziału $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Zauważmy, że wybierając dostatecznie dużą liczbę naturalną $N \in \mathbb{N}$ ułamek $\frac{1}{N}$ będzie mniejszy od wybranej dodatniej liczby ε . Ponieważ $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N}$ dla dowolnej liczby naturalnej N więc wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ począwszy od wyrazu a_N należą do przedziału $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Obserwacja ta prowadzi do wniosku, że dla dowolnej liczby dodatniej ε do przedziału $(-\varepsilon, \varepsilon)$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ (tzn. wszystkie za wyjątkiem wyrazów $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N-1}$). Ilustruje to poniższa grafika.

prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{1}{n}$



Oczywiście im liczba ε będzie bliżej zera, tym liczba naturalna N będzie musiała być większa aby warunek $\frac{1}{N} < \varepsilon$ był spełniony. Jednak wciąż nierówność ta będzie spełniona dla prawie wszystkich wyrazów ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ (tzn. dla ułamków $\frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \dots$).

Słownik

otoczenie punktu

otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Infografika

Polecenie 1

Na poniższej infografice zilustrowane zostało pojęcie prawie wszystkich wyrazów ciągu na przykładzie pewnego ciągu nieskończonego. Zapoznaj się z tą infografiką a następnie wykonaj polecenia zamieszczone poniżej.

Polecenie 2

Do których z podanych przedziałów należą prawie wszystkie wyrazy ciągu przedstawionego na infografice.

☐ $\langle -1, 0 \rangle$

☐ $(-\frac{1}{2}, 1)$

☐ $\langle 0, 1 \rangle$

☐ $(-1, \frac{1}{10})$

Polecenie 3

Podaj przykład ciągu takiego, że do przedziału $(-1, \frac{1}{2})$ należą prawie wszystkie jego wyrazy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest ciąg $a_n = (-1)^n \cdot n$. Czy do przedziału $(0, +\infty)$ należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu?

☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 2



Uzupełnij tekst przeciągając w puste miejsca odpowiednie elementy.

Dany jest zbiór A , do którego należą wszystkie liczby naturalne większe od 2000. Rozważmy ciąg $a_n = 5n + 3$. Do zbioru A prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , gdyż $a_n \in A$ dla wszystkich $n >$

nie należą

300

299

należą

399

Ćwiczenie 3



Wskaż przedział, do którego należą prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.

☐ $(1, 2)$

☐ $(2, 3)$

☐ $(0, 1)$

Ćwiczenie 4



Wskaż ciąg, którego prawie wszystkie wyrazy należą do przedziału $(-1, 1)$.

☐ $a_n = \frac{2n}{n+1}$

☐ $a_n = \frac{n+1}{2}$

☐ $a_n = \frac{2}{n+1}$

Ćwiczenie 5



Dany jest ciąg $a_n = 2n + 1$. Wskaż przedziały, do których należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

☐ $(1, 100000)$

☐ $(101, +\infty)$

☐ $(-\infty, 100)$

☐ $(-1, +\infty)$

Ćwiczenie 6



Wskaż ciągi, których prawie wszystkie wyrazy należą do zbioru $\{n \in \mathbb{N} : n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

☐ $a_n = 3n + 9$

☐ $a_n = n + 2$

☐ $a_n = 3n + 2$

☐ $a_n = 6n - 18$

Ćwiczenie 7



Połącz w pary ciągi ze zbiorami, do których należą prawie wszystkie wyrazy tych ciągów.

$$\{n \in \mathbb{N} : n \leq -10\}$$

$$a_n = n - 200$$

$$\{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n \leq 30\}$$

$$a_n = 2025 - 3n$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq 51\}$$

$$a_n = 20 + (-1)^n$$

Ćwiczenie 8



Połącz w pary ciągi ze zbiorami, do których należą prawie wszystkie wyrazy tych ciągów.

$$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 21, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = 2n + 1$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = 4n + 1$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n = 4k + 25, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = n + 5$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n = k + 111, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = 4n + 50$$

Ćwiczenie 9



Przeciągnij podane ciągi do obszarów odpowiadających zbiorom, do których należą prawie wszystkie wyrazy tych ciągów?

$$\{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 100, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = 6n + 23$$

$$a_n = 3n + 1$$

$$a_n = 3n - 1$$

$$a_n = 3n + 2$$

$$a_n = 9n + 16$$

$$a_n = 6n + 25$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 200, k \in \mathbb{N}\}$$

$$a_n = 6n + 10$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Dowiesz się, co oznacza sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”.
- Zaobserwujesz, jaki jest związek otoczenia punktu ze zwrotem „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”.
- Wskażesz dla danego ciągu nieskończonego zbiory, do których należą prawie wszystkie jego wyrazy.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- WebQuest;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego?” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Granica ciągu nieskończonego](#)

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego?”.