



Jak wykorzystać zasadę zachowania momentu pędu w zadaniach?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak wykorzystać zasadę zachowania momentu pędu w zadaniach?

Czy to nie ciekawe ?

Od przyrządów lotniczych i wyposażenia statków kosmicznych, przez urządzenia codziennego użytku, po place zabaw dla dzieci – wszędzie wykorzystujemy w praktyce zasadę zachowania momentu pędu. Za każdym razem, gdy widzisz obracający się układ, a w szczególności gdy zmienia się jego moment bezwładności, możesz przeanalizować jego zachowanie stosując tę zasadę. Jaka jest jej treść i jak ją zastosować do rozwiązywania zadań?



Rys. a. Przyrządy lotnicze.

Twoje cele

W tym materiale:

- zdefiniujesz, czym jest moment pędu punktu materialnego i bryły sztywnej,
- dowiesz się jaka jest treść zasady zachowania momentu pędu,
- poznasz zastosowania techniczne zasady zachowania momentu pędu,
- nauczysz się wykorzystywać zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Zasada zachowania momentu pędu stwierdza, że moment pędu $\vec{L}$ układu jest zachowany, jeżeli do układu nie zostanie przyłożony zewnętrzny niezrównoważony **moment siły** $\vec{M}$. Zasada ta wynika z równania ruchu bryły sztywnej,

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}.$$

Jednocześnie wiemy z definicji, że moment pędu dla punktu materialnego to iloczyn wektorowy wektora wodzącego $\vec{r}$ (łączącego punkt z osią obrotu) i pędu $\vec{p}$ tego punktu:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Przeprowadzając poniższe sumowanie otrzymujemy zależność pozwalającą obliczyć moment pędu bryły sztywnej za pomocą jej **momentu bezwładności** I i **prędkości kątowej** ω :

$$L = \sum_{i=1}^n r_i^\perp p_i = \sum_{i=1}^n r_i^\perp m_i v_i = \sum_{i=1}^n r_i^\perp m_i \omega r_i^\perp = \omega \sum_{i=1}^n m_i (r_i^\perp)^2 = I \omega.$$

Symbol $r_i^\perp$ oznacza odległość i -tego punktu od osi obrotu, tj. wektor $\vec{r}_i^\perp$ jest prostopadłą do osi składową wektora położenia tego punktu.

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że $\vec{L} = \text{const}$, jeśli $\vec{M}_{\text{wygodkowy}} = 0$. Prowadzi to do istotnej obserwacji z punktu widzenia mechaniki bryły sztywnej:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\omega}_2 = \frac{I_1}{I_2} \vec{\omega}_1$$

Powyższy wzór oznacza, że jeśli nastąpiła zmiana momentu bezwładności układu – przy braku przyłożonych zewnętrznych momentów siły – to zmianie musi ulec prędkość kątowa tego układu. Możemy się o tym przekonać, wykonując prosty eksperyment na placu zabaw: wystarczy, że znajdziemy karuzelę pionową lub karuzelę kołową, jak na Rys. 1.



Rys. 1. Karuzela.

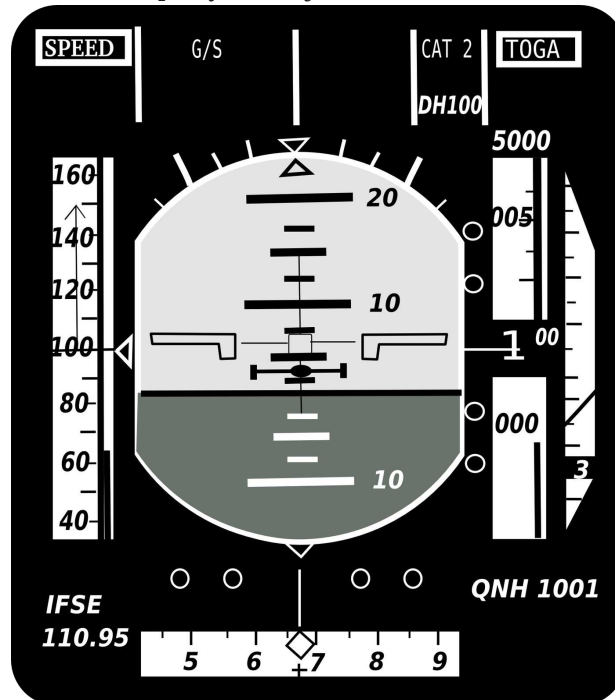
Łapiąc się poręczy takiej karuzeli i odpychając nogą od podłoża, przykładamy zewnętrzny moment siły, przez co układ „my i karuzela” zwiększa swój momentu pędu. Gdy przestajemy się odpychać i wskakujemy na platformę, możemy przyjąć, że do układu nie są przyłożone zewnętrzne momenty sił (tarcie na łożysku karuzeli i opór powietrza uznajemy za pomijalne, jeśli wykonamy eksperyment w krótkim czasie). Obracamy się zatem z pewną ustaloną prędkością kątową, a cały układ posiada określony moment bezwładności. Jeśli złapiemy się poręczy i przysuniemy się w stronę osi obrotu, poczujemy gwałtowny wzrost prędkości obrotowej karuzeli. Dlaczego? Ponieważ przesuwając ciężar swojego ciała bliżej osi obrotu, zmniejszamy nasz moment bezwładności $I = mR^2$, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu musi zatem wzrosnąć prędkość kątowa.

Tego samego zjawiska możemy doświadczyć, siadając na krześle obrotowym – jeśli odepchniemy się od podłoża, obracamy się z pewną prędkością kątową. Co się stanie, jeśli w trakcie obracania się rozłożymy szeroko ramiona? Prędkość obrotowa zmaleje – ponieważ zwiększył się nasz moment bezwładności (zwiększyliśmy odległość części masy układu od jego osi obrotu). Doświadczenie możemy zmodyfikować, biorąc do rąk obciążniki, na przykład hantle treningowe. Rozpoczynając od powolnych obrotów przy szeroko rozłożonych ramionach, gwałtownie przyspieszymy, przyciągając ręce i ciężary blisko do naszego ciała.

Fakt, że zmiana momentu pędu wymaga przyłożenia zewnętrznego momentu siły, wykorzystywany jest w wielu urządzeniach. Przykłady widoczne są na Rys. 2a, b, c, d, e.

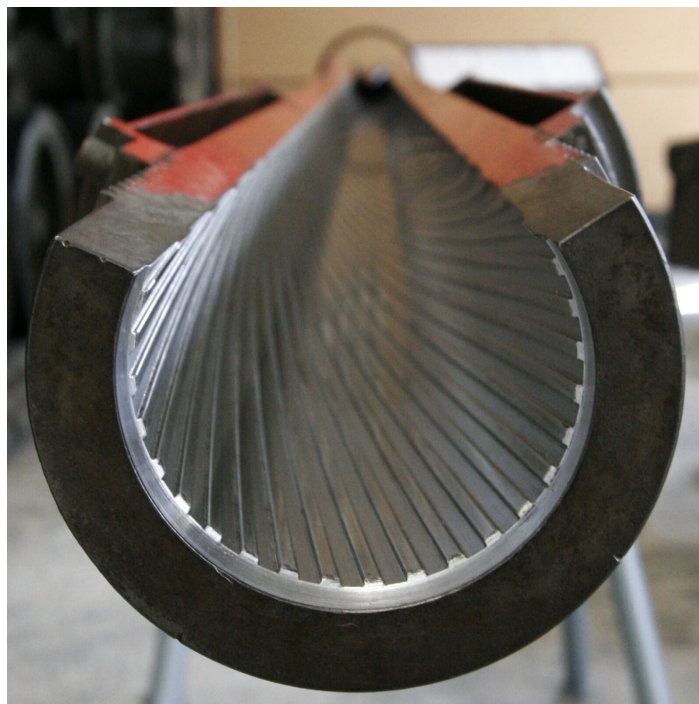
„Sztuczny horyzont” (Rys. 2a.) to przyrząd lotniczy korzystający z żyroskopu – element o dużym momencie bezwładności rozkręcony do znacznej prędkości kątowej umocowany

zachowuje swoją orientację w przestrzeni, wskazując kierunek poziomy, umożliwiając kontrolowanie położenia samolotu przy słabej widoczności.



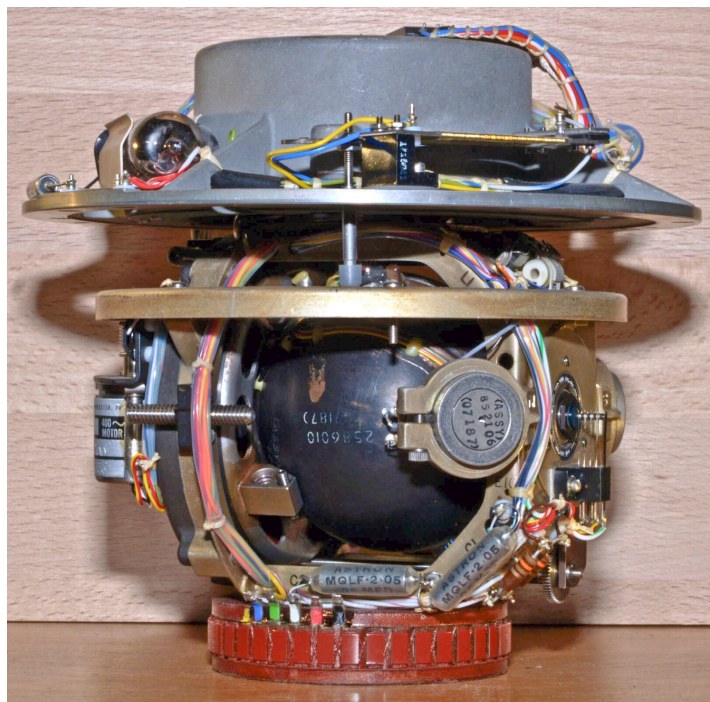
Rys. 2a. "Sztuczny horyzont" jako przykład urządzenia wykorzystującego zasadę zachowania momentu pędu.

Gwintowana lufa (Rys. 2b.) wprawia wylatujący z niej pocisk w ruch obrotowy, przez co jego lot jest stabilniejszy.



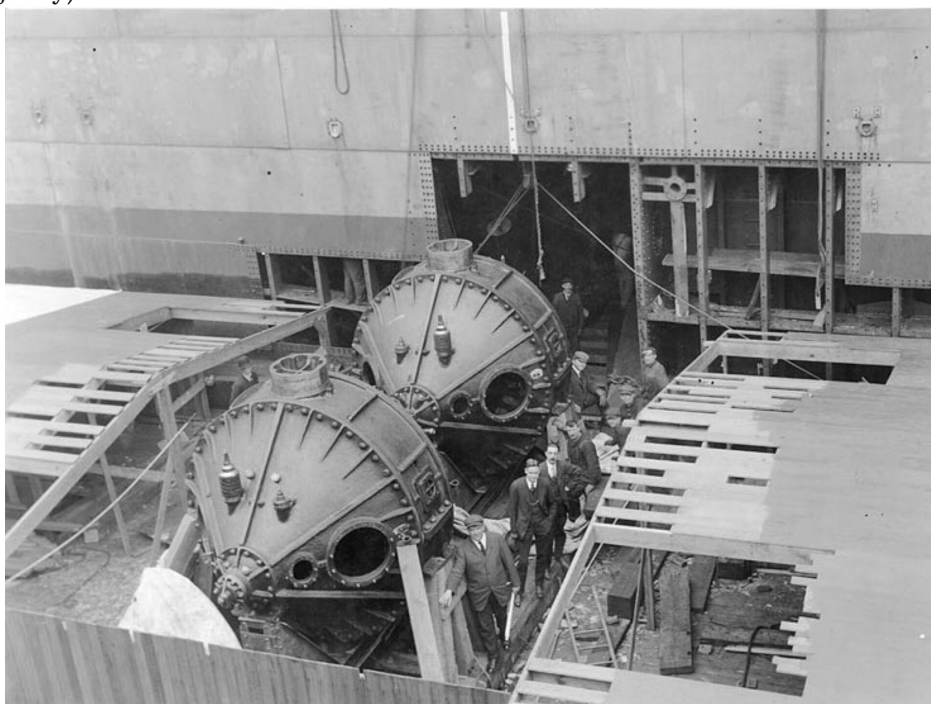
Rys. 2b. Gwintowana lufa jako przykład urządzenia wykorzystującego zasadę zachowania momentu pędu.

Żyrokompas (Rys. 2c.) to urządzenie, które wskazuje biegun geograficzny Ziemi (w przeciwieństwie do klasycznej igły magnetycznej, wskazującej biegun magnetyczny i jest podatna na zakłócenia związane z obecnością ferromagnetyków w pobliżu), korzystając z zasady żyroskopu, podobnie jak wspomniany sztuczny horyzont, ale jest inaczej zamocowane.



Rys. 2c. Żyrokompas jako przykład urządzenia wykorzystującego zasadę zachowania momentu pędu.

Stabilizatory (Rys. 2d.) samolotów, samochodów, okrętów, rakiet, sond kosmicznych i innych obiektów – masywne żyroskopy o bardzo dużym momencie pędu – sprawiają, że ruch pojazdu jest bardziej płynny i odporny na zaburzenia (podobnie jak pocisk wylatujący z gwintowanej lufy).



Rys. 2d. Stabilizator samolotów jako przykład urządzenia wykorzystującego zasadę zachowania momentu pędu.

Używane na co dzień w fotografii i technice filmowej stabilizatory obrazu (Rys. 2e.) wykorzystują kilka żyroskopów, rozpędzanych silnikiem elektrycznym i zapewniają stabilność nagrywanego obrazu niezależnie od drgań czy ruchów ręki operatora.



Rys. 2e. Stabilizator obrazu jako przykład urządzenia wykorzystującego zasadę zachowania momentu pędu.

moment siły

(ang. *torque*) względem punktu to iloczyn wektora promienia wodzącego, o początku w tym punkcie i końcu w miejscu przyłożenia tej siły, przez tę siłę:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} .$$

moment bezwładności

(ang. *moment of inertia*) miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej, ustalonej osi obrotu.

prędkość kątowa

(ang. *angular velocity*) wielkość wektorowa opisująca ruch obrotowy (np. ruch po okręgu) ciała. Jest wektorem (pseudowektorem) leżącym na osi obrotu ciała i skierowanym zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

Film samouczek

Jak wykorzystać zasadę zachowania momentu pędu w zadaniach?

Zapoznaj się z krótkim filmem, który wyjaśnia, w jaki sposób stosuje się zasadę zachowania momentu pędu.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DChuPUpZw>

Zapoznaj się z treścią samouczka.

Polecenie 1

Opisz zjawisko pokazane na filmie i znajdź analogię do zderzenia nieelastycznego.

Polecenie 2

Zakładając, że $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $M = 21 \text{ kg}$, $R = 37 \text{ cm}$, $m = 31 \text{ kg}$, $r = 43 \text{ cm}$, oblicz końcową prędkość kątową układu po takim „zderzeniu”.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeśli w układzie, do którego nie przyłożono z zewnątrz momentu siły, dojdzie do zmiany momentu bezwładności tego układu, to zmieni się prędkość kątową, z jaką ten układ się obraca. Uzupełnij wzór, który pozwala obliczyć tę prędkość, znając początkowy i końcowy moment bezwładności tego układu oraz początkową prędkość kątową. Podstaw podane niżej elementy w miejsce a, b, c, d.

$$\vec{\omega}_a = \frac{I_b}{I_c} \vec{d}_1$$

a -

b -

c -

d -

Ćwiczenie 2



Jeśli moment bezwładności układu zmniejszył się o połowę, to ile razy zwiększyła się prędkość kątowna tego układu?

☐ $\sqrt{2}$ razy

☐ $\frac{1}{2}$ razy

☐ 4 razy

☐ 2 razy

Ćwiczenie 3



Jeśli odległość ciała, które poruszało się w odległości R_1 od osi obrotu zmniejszyła się o połowę, to ile razy zwiększyła się prędkość kątowa tego układu?

☐ 4 razy

☐ $\sqrt{2}$ razy

☐ $\frac{1}{2}$ razy

☐ 2 razy

Ćwiczenie 4



Poniższy wykres prezentuje obliczenia teoretyczne dla następującej sytuacji: walec o masie 20 kg, o promieniu podstawy 30 cm, obraca się z początku wokół osi przechodzącej przez środek symetrii z częstotliwością pół obrotu na sekundę. Gdy walec obraca się wokół osi znajdującej się w odległości d od jego środka masy, jego moment bezwładności należy obliczyć korzystając z twierdzenia Steinera. Zakładając, że w trakcie odsuwania walca na coraz większą odległość od osi obrotu nie zmienia się jego moment pędu, obliczono następujące wielkości:

A – moment bezwładności I_0 walca względem osi przechodzącej przez środek jego masy,

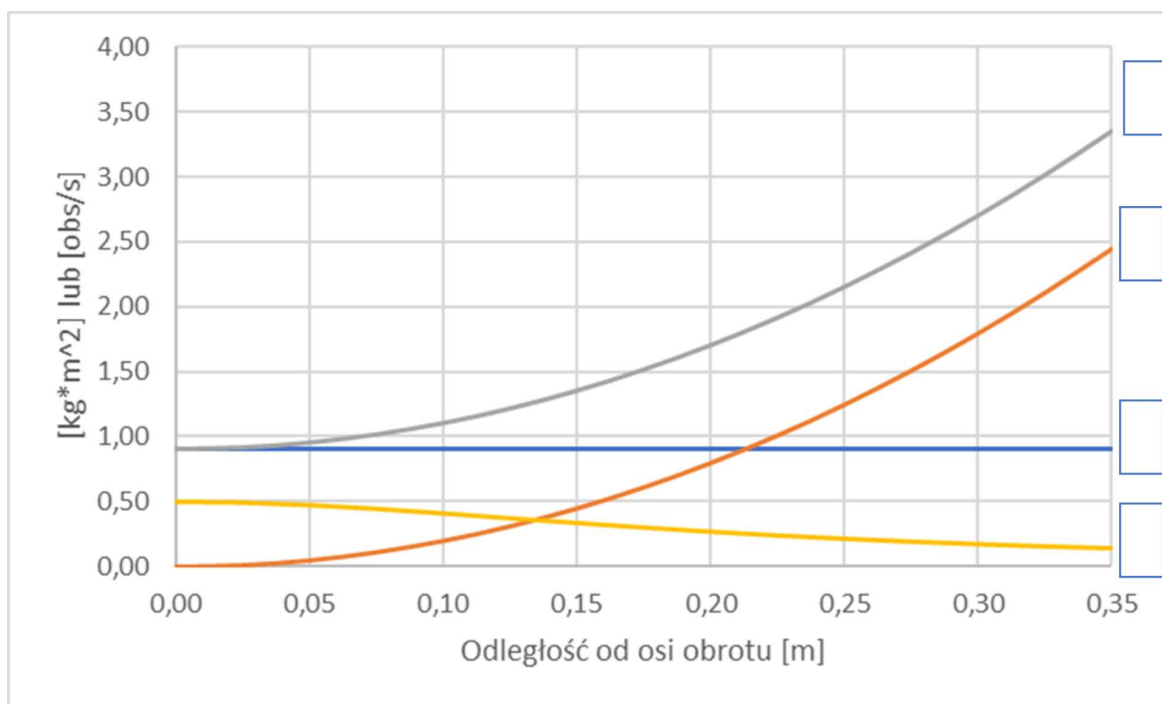
$$I_0 = \frac{1}{2}mR^2$$

B – czynnik md^2 z twierdzenia Steinera

C – całkowity moment bezwładności obliczony zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$I_s = I_0 + md^2$$

D – częstotliwość obrotu f wyrażona w obrotach na sekundę (zmieniająca się zgodnie z zależnością $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$)



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Przyporządkuj krzywom na wykresie odpowiadające im wielkości (A, B, C, D)

pomarańczowa krzywa

C

niebieska krzywa

D

szara krzywa

B

żółta krzywa

A

Ćwiczenie 5



Dziecko obraca się na krawędzi karuzeli, jak na rysunku poniżej, czyli znajduje się w odległości $R=1\text{m}$ od osi obrotu. Po początkowym rozpędzeniu, karuzela obraca się z prędkością obrotową $0,5$ obrotu na sekundę. Dziecko w trakcie zabawy chwyciło się poręczy i przysunęło bliżej osi obrotu – na odległość $r=0,5$ metra.



Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/karuzela-plac-zabaw-dla-dzieci-181034/> [dostęp 13.04.2022], domena publiczna.

Jaka jest prędkość kątowa karuzeli, wyrażona w radianach na sekundę?

☐ $\frac{\pi}{2}$

☐ 2π

☐ π^2

☐ π

Ćwiczenie 6



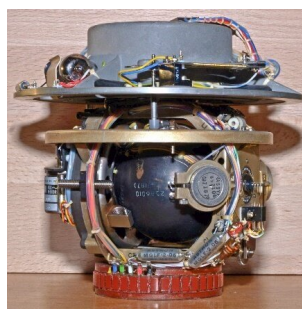
Przyporządkuj zdjęcia urządzeń wykorzystujących w swym działaniu zasadę zachowania momentu pędu odpowiadającym im nazwom.



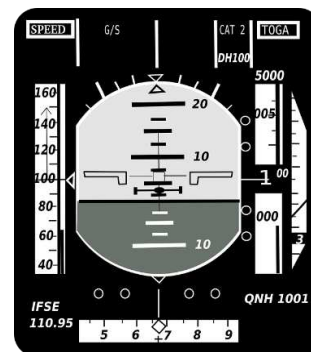
Żyrokompas
(wykorzystywany
w nawigacji)



Sztuczny horyzont
(przrząd lotniczy)



Stabilizator obrazu
(ułatwia
operowanie
kamerą)



Gwintowana lufa
(stabilizuje lot
pocisku)

Źródło: dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:105mm_tank_gun_Rifling.jpg [dostęp 13.04.2022],
<https://pixabay.com/pl/vectors/sztuczny-horyzont-%C5%BCyroskop-horyzont-153086/> [dostęp 13.04.2022],
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroscope_hg.jpg [dostęp 13.04.2022],
<https://www.flickr.com/photos/30478819@N08/48844839477> [dostęp 13.04.2022], licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 7



Kiedy moment pędu ciała ulega zmianie?

- ☐ Jeśli do układu przyłożony zostanie niezrównoważony, zewnętrzny moment siły.
- ☐ Przy zderzeniach sprężystych.
- ☐ Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu nigdy.
- ☐ Jeśli wewnątrz układu dojdzie do oddziaływań powodujących powstanie momentów sił

Ćwiczenie 8



Zasadę zachowania momentu pędu można wyrazić matematycznie wzorem, którego wybrakowana postać znajduje się poniżej. Uzupełnij brakujące miejsca poniższymi elementami.

$$\boxed{} = \Delta \boxed{} \boxed{} \Delta t$$

- M $\vec{L}$ L $\vec{M}$ / * +

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Jak zastosować zasadę zachowania momentu pędu w zadaniach?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 7) stosuje zasadę zachowania momentu pędu.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. tłumaczy, czym jest moment pędu punktu materialnego i bryły sztywnej, 2. określa, jaka jest treść zasady zachowania momentu pędu, 3. stosuje techniczne zasady zachowania momentu pędu, 4. wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań związanych z zasadą zachowania momentu pędu.
Strategie i metody nauczania:	gamifikacja, rozwiązywanie problemów
Formy zajęć:	praca indywidualna, praca grupowa
Środki dydaktyczne:	komputery lub tablety dla każdego ucznia
Materiały pomocnicze	-
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel w ramach wprowadzenia prosi ochotników o przypomnienie i zapisanie na tablicy najważniejszych pojęć związanych z momentem pędu – definicja momentu pędu dla punktu materialnego (ochotnik nr 1), definicja momentu pędu dla bryły sztywnej (ochotnik nr 2), zasada zachowania momentu pędu (ochotnik nr 3, sformułowanie mówiące o momencie pędu i czasie), zmiana prędkości kątowej układu przy zmianie jego momentu bezwładności (ochotnik nr 4). Nauczyciel po dyskusji z klasą nad tymi wzorami (i rozwianiem ewentualnych wątpliwości), prosi uczniów o włączenie gry z niniejszego e-materiału.	
Faza realizacyjna:	
Uczniowie indywidualnie rozwiązują zadania przedstawione w grze. Zadania są wymagające obliczeniowo – uczniowie przeprowadzają niezbędne obliczenia w zeszycie lub korzystając z arkusza kalkulacyjnego na komputerze (zalecane). Osoby, które pierwsze przejdą całą grę są nagradzane stosowną oceną, po czym przydzielone do osób, które radzą sobie wolniej, pomagając im przeprowadzić obliczenia. Nauczyciel również pomaga uczniom, którzy tego potrzebują, przeprowadzić obliczenia. W trakcie pracy grupowej nauczyciel dba o to, żeby uczniowie, którzy przeszli grę pomagali pozostałym uczniom zrozumieć i rozwiązać zadania, a nie jedynie kopiowali poprawne odpowiedzi. Gdy wszyscy uczniowie ukończą grę, nauczyciel przechodzi do fazy podsumowującej.	
Faza podsumowująca:	

Nauczyciel dyskutuje z uczniami które zadania były bardzo proste, a które sprawiły większą trudność. Dla podsumowania nauczyciel prezentuje uczniom filmy z Internetu, pokazujące pracę kół zamachowych w fabrykach, hutach (przekazując informację o zabytkowych hutach, jak „Szaleniec z Maleńca” ze Świętokrzyskiego Szlaku Zabytków Techniki).

Praca domowa:

Ze względu na dużą liczbę zadań rozwiązanych w trakcie lekcji, sugeruje się wykonanie dodatkowych zadań z medium sprawdzającego przez chętnych.

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium**

Można również zrealizować lekcję w formie odwróconej klasy, prosząc uczniów o zagranie w grę w domu, a na lekcji dyskutując jej wyniki i powstałe przy rozwiązywaniu problemy.