

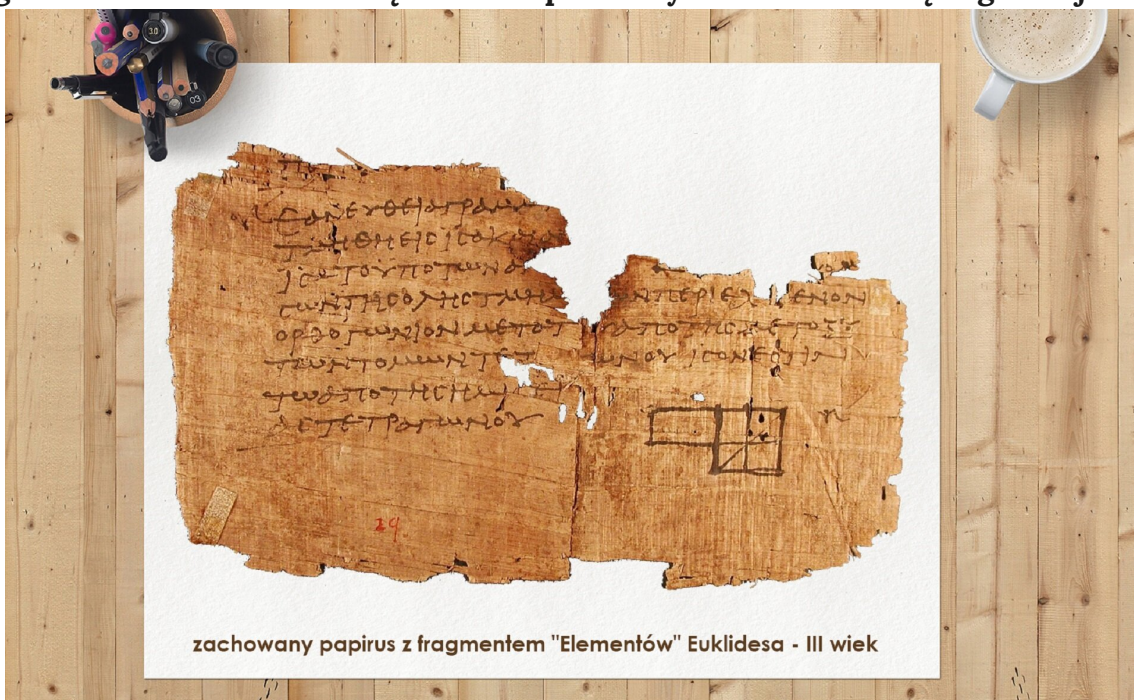
Czy liczby pierwsze zdradzą swoje tajemnice?

Czy liczby pierwsze zdradzą swoje tajemnice?

Wstęp

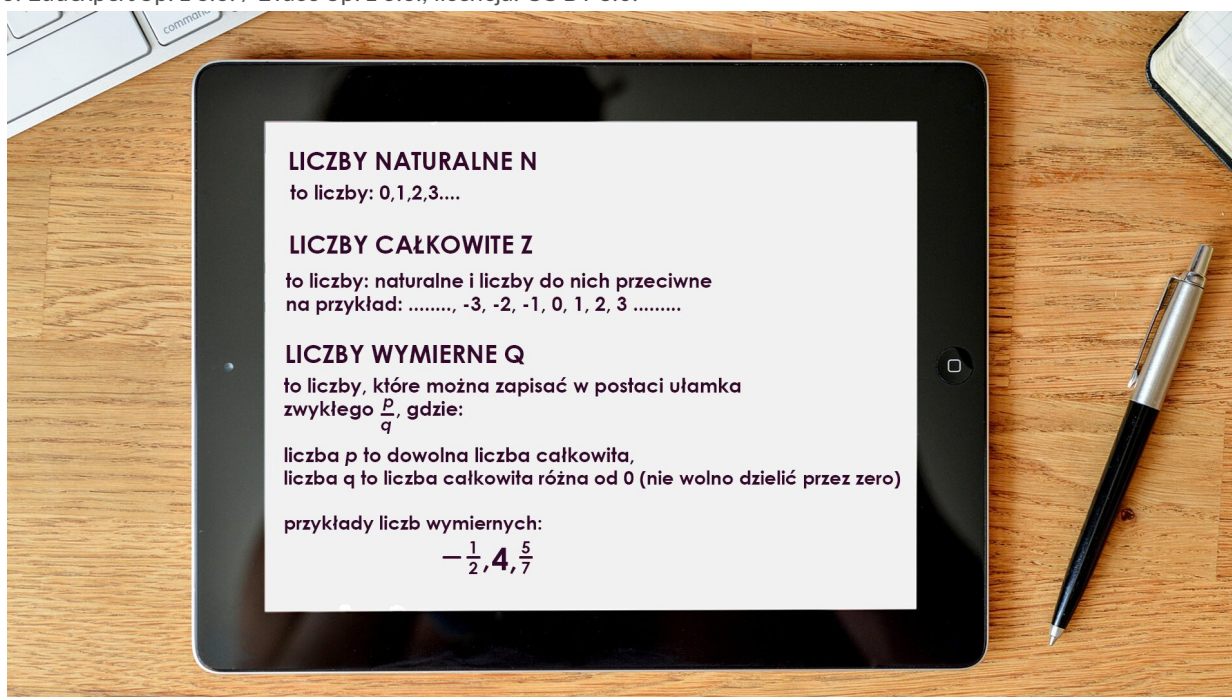
Liczby pierwsze były tematem rozważań uczonych już od wieków. Pierwsze wzmianki na temat liczb pierwszych i ich własności pojawiły się w dziele Euklidesa *Elementy*. W tym samym czasie inny grecki matematyk, Eratostenes, stworzył algorytm, który w prosty sposób pozwalał wyznaczać dowolnie wiele liczb pierwszych z danego przedziału $[2, n]$. Sposób ten zwany jest dzisiaj **sitem Eratostenesa**.

Dlaczego warto zainteresować się liczbami pierwszymi? Dowiedzie się tego z tej lekcji.



zachowany papirus z fragmentem "Elementów" Euklidesa - III wiek

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Nauczysz się

poznasz liczby pierwsze i liczby złożone;

dokonasz rozkładu liczb złożonych na czynniki pierwsze.

Cele edukacyjne zgodne z etapem kształcenia

1. rozpoznaje liczby pierwsze i liczby złożone;
2. charakteryzuje rodzaje liczb pierwszych;
3. stosuje metody znajdowania liczb pierwszych.

CZY LICZBY PIERWSZE ZDRADZĄ SWOJE TAJEMNICE? PO PIERWSZE LICZBY PIERWSZE – *audiobook*

Rozdziały:

1. Ja ci pomogę
2. O liczbach pierwszych słów kilka
3. Świetnie! Wszystko wiecie!
4. Podsumowanie

Notatka dla prowadzącego



Wskazówka

Podczas odsłuchiwania audiobooka postaraj się zapamiętać, co to są [liczby pierwsze](#) i [liczby złożone](#).

Audiobook można wysłuchać pod adresem: <https://zpe.gov.pl/b/Pbd985iyM>

Czy liczby pierwsze zdradzą swoje tajemnice?

Po pierwsze liczby pierwsze

Rozdział 1

Ja Ci pomogę

Materiał przedstawia rozmowę brata i siostry o liczbach pierwszych i złożonych.

- Mamo, mamo! Nie rozumiem tego. Kasiu, gdzie jest mama?
- Poszła na zakupy. Może ja Ci pomogę?
- OK.
- Pokaż mi zeszyt. O, liczby pierwsze i złożone.
- Nic z tego nie rozumiem.
- Spokojnie. Zaraz Ci wszystko wytłumaczę. Weźmy pod uwagę na przykład liczbę 2. Przez jakie liczby dzieli się dwa bez reszty?
- Przez zero, jeden i dwa...
- Pamiętaj, nigdy nie dzielimy przez 0.
- Czyli przez jeden i dwa?
- Tak. Liczba dwa jest liczbą pierwszą. Ma dwa dzielniki: 1 i siebie samą. Rozumiesz?
- Chyba tak.
- To podaj jeszcze jakieś przykłady liczb pierwszych.
- 3, 5, 7.
- Super! A teraz liczby złożone. To są liczby, które mają więcej niż dwa dzielniki: 1, siebie samą i przynajmniej jedną inną liczbę.
- Na przykład 4 i 8 to liczby złożone?
- Tak! Pamiętaj też, że liczby pierwsze i złożone są liczbami naturalnymi. Wiesz, co to są liczby naturalne?
- To liczby całkowite dodatnie oraz liczba zero.
- Super! Mądrego mam brata! Widzisz, matematyka nie jest taka trudna.
- A 0 i 1 są liczbami pierwszymi czy złożonymi?
- Nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi. Liczba jeden ma tylko jeden dzielnik, gdyż dzieli się tylko przez samą siebie. Zero ma nieskończenie wiele dzielników, gdyż jego dzielnikiem jest każda liczba naturalna dodatnia. A czy wiesz, dlaczego liczby pierwsze są takie ważne?

– Nie. Dlaczego?

– Liczby pierwsze mają ogromne znaczenie w kryptologii, czyli w dziedzinie wiedzy dotyczącej przekazywania informacji w sposób zabezpieczony. Sam wiesz, jak ważne jest to w dzisiejszych czasach.

– Tak wiem. To właśnie szyfrowanie z wykorzystaniem liczb pierwszych w naszych hasłach komputerowych, hasłach do kart kredytowych, zakupach w Internecie i w wielu innych miejscach powoduje, że możemy czuć się bezpiecznie.

Rozdział 2

O liczbach pierwszych słów kilka

Materiał przedstawia w sposób zwarty dodatkowe informacje o liczbach pierwszych.

Największe liczby pierwsze

- Największa odkryta dotąd liczba pierwsza liczy 22 338 618 cyfr w zapisie dziesiętnym. Odkrył ją Curtis Cooper 7 stycznia 2016 roku. Pamiętajmy jednak, że w każdej chwili może zostać odkryta kolejna, większa liczba pierwsza.
- W czasach, gdy do odkrywania liczb pierwszych nie używano komputerów, a jedynie kalkulatory, największą – 44-cyfrową liczbę pierwszą – odkrył Francuz Aimé Ferrier. Dokonał tego w roku 1951.

Rodzaje liczb pierwszych

- Liczby bliźniacze to dwie liczby pierwsze, których różnica jest równa 2. Na przykład: (3 i 5); (5 i 7); (59 i 61); (1619 i 1621).
- Liczby czworaczne to liczby pierwsze mające postać: p , $p+2$, $p+6$, $p+8$. Na przykład: (5, 7, 11, 13) albo (821, 823, 827, 829).
- Liczby pierwsze lustrzane to pary liczb, z których jedna powstaje przez zapisanie cyfr dziesiętnych drugiej w odwrotnej kolejności. Na przykład: (13 i 31); (17 i 71).
- Liczby pierwsze palindromiczne to liczby, które nie zmieniają się, gdy ich cyfry dziesiętne zapiszemy w odwrotnej kolejności. Na przykład 101, 131.

Poszukiwanie liczb pierwszych

- Najbardziej znanym sposobem znajdowania liczb pierwszych jest tzw. Sito Eratostenesa. Jest to metoda kolejnego „wysiewania” liczb pierwszych spośród liczb naturalnych większych od 1. Z danego zakresu liczb wybieramy najmniejszą z nich, zaznaczamy ją a następnie zaznaczamy wszystkie jej wielokrotności i wykreślamy je.

- W dzisiejszych czasach do poszukiwania nowych liczb pierwszych wykorzystuje się przede wszystkim komputery. Każdy może rozpocząć poszukiwania. Wystarczy dołączyć do międzynarodowego programu GIMPS-Great Internet Mersenne Prime Search.

Ile jest liczb pierwszych?

- Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Dowiódł tego Euklides, grecki matematyk, w IV w. p.n.e.

- Euklides wykazał, że dla dowolnie długiej listy kolejnych liczb pierwszych, po wymnożeniu liczb z tej listy i dodaniu 1, otrzymamy albo liczbę pierwszą spoza listy, albo liczbę złożoną, która rozkłada się na czynniki pierwsze spoza listy. Wobec tego lista nie może być pełna, musi być więc nieskończenie długa.

Hipoteza Goldbacha

- Hipoteza sformułowana ponad 250 lat temu przez pruskiego matematyka Christiana Goldbacha głosi, że każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Przypuszczenie to, nie zostało dotąd udowodnione, ani też obalone, pomimo licznych prób oraz wysokich nagród finansowych ufundowanych za jego udowodnienie.

Rozdział 3

Świetnie! Wszystko wiecie!

Materiał przedstawia fragment lekcji, w trakcie której nauczyciel odpytuje uczniów z rozkładu liczb na czynniki pierwsze i cech podzielności liczb naturalnych.

— Tomku, rozłóż proszę liczbę 6 oraz liczbę 18 na czynniki pierwsze.

— $6 = 2 \cdot 3$. $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

— Bardzo dobrze! Marku, na czym polega rozkład liczby na czynniki pierwsze?

— To zapisywanie liczby złożonej w postaci iloczynu liczb pierwszych.

- Świetnie! Stawiam wam po plusie. Przypominam, że rozkład liczb złożonych na czynniki pierwsze przyda nam się przy określaniu największego wspólnego dzielnika (NWD) dwóch liczb naturalnych oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych. A teraz cechy podzielności liczb naturalnych. Karolino, kiedy liczba jest podzielna przez 5?
- Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0 lub 5.
- A przez 2?
- Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0, 2, 4, 6 albo 8.
- Przez 9?
- Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 9.
- Na pewno? Zastanów się.
- Yyy... Nie! Jeśli suma cyfr jest podzielna przez 9.
- Właśnie tak. A kiedy liczba jest podzielna przez 3?
- Jeśli suma cyfr jest podzielna przez 3. A jeśli cyfrą jedności liczby naturalnej dodatkowo jest 0 to liczba jest podzielna przez 10!
- Bardzo dobrze!

Rozdział 4

Podsumowanie

Materiał podsumowuje audiobook. Przypomina czym są liczby pierwsze i złożone.

Liczby pierwsze to liczby naturalne, większe od 1, które dzielą się tylko przez 1 i samą siebie. Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki. Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi. Liczby złożone możemy rozkładać na czynniki pierwsze.

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zobacz także

Czy liczby pierwsze zdradzą swoje tajemnice?

Po pierwsze liczby pierwsze

Rozdział 1

Ja Ci pomogę

Materiał przedstawia rozmowę brata i siostry o liczbach pierwszych i złożonych.

- Mamo, mamo! Nie rozumiem tego. Kasiu, gdzie jest mama?
- Poszła na zakupy. Może ja Ci pomogę?
- OK.
- Pokaż mi zeszyt. O, **liczby pierwsze** i **złożone**.
- Nic z tego nie rozumiem.
- Spokojnie. Zaraz ci wszystko wytłumaczę. Weźmy pod uwagę na przykład liczbę 2. Przez jakie liczby dzieli się dwa bez reszty?
- Przez zero, jeden i dwa...
- Pamiętaj, nigdy nie dzielimy przez 0.
- Czyli przez jeden i dwa?
- Tak. Liczba dwa jest liczbą pierwszą. Ma dwa dzielniki: 1 i siebie samą. Rozumiesz?
- Chyba tak.
- To podaj jeszcze jakieś przykłady liczb pierwszych.
- 3, 5, 7.
- Super! A teraz liczby złożone. To są liczby, które mają więcej niż dwa dzielniki: 1, siebie samą i przynajmniej jedną inną liczbę.
- Na przykład 4 i 8 to liczby złożone?
- Tak! Pamiętaj też, że liczby pierwsze i złożone są liczbami naturalnymi. Wiesz, co to są liczby naturalne?
- To liczby całkowite dodatnie oraz liczba zero.
- Super! Mądrego mam brata! Widzisz, matematyka nie jest taka trudna.
- A 0 i 1 są liczbami pierwszymi czy złożonymi?
- Nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi. Liczba jeden ma tylko jeden dzielnik, gdyż dzieli się tylko przez samą siebie. Zero ma nieskończenie wiele dzielników, gdyż jego

dzielnikiem jest każda liczba naturalna dodatnia. A czy wiesz, dlaczego liczby pierwsze są takie ważne?

— Nie. Dlaczego?

— Liczby pierwsze mają ogromne znaczenie w kryptologii, czyli w dziedzinie wiedzy dotyczącej przekazywania informacji w sposób zabezpieczony. Sam wiesz, jak ważne jest to w dzisiejszych czasach.

— Tak wiem. To właśnie szyfrowanie z wykorzystaniem liczb pierwszych w naszych hasłach komputerowych, hasłach do kart kredytowych, zakupach w Internecie i w wielu innych miejscach powoduje, że możemy czuć się bezpiecznie.

Rozdział 2

O liczbach pierwszych słów kilka

Materiał przedstawia w sposób zwarty dodatkowe informacje o liczbach pierwszych.

Największe liczby pierwsze

- Największa odkryta dotąd liczba pierwsza liczy 22 338 618 cyfr w zapisie dziesiętnym. Odkrył ją *Curtis Cooper* 7 stycznia 2016 roku. Pamiętajmy jednak, że w każdej chwili może zostać odkryta kolejna, większa liczba pierwsza.
- W czasach, gdy do odkrywania liczb pierwszych nie używano komputerów, a jedynie kalkulatory, największą – 44-cyfrową liczbę pierwszą – odkrył Francuz Aimé Ferrier. Dokonał tego w roku 1951.

Rodzaje liczb pierwszych

- Liczby bliźniacze to dwie liczby pierwsze, których różnica jest równa 2. Na przykład: (3 i 5); (5 i 7); (59 i 61); (1619 i 1621).
- Liczby czworaczne to liczby pierwsze mające postać: p , $p+2$, $p+6$, $p+8$. Na przykład: (5, 7, 11, 13) albo (821, 823, 827, 829).
- Liczby pierwsze lustrzane to pary liczb, z których jedna powstaje przez zapisanie cyfr dziesiętnych drugiej w odwrotnej kolejności. Na przykład: (13 i 31); (17 i 71).
- Liczby pierwsze palindromiczne to liczby, które nie zmieniają się, gdy ich cyfry dziesiętne zapiszemy w odwrotnej kolejności. Na przykład 101, 131.

Poszukiwanie liczb pierwszych

- Najbardziej znanym sposobem znajdowania liczb pierwszych jest tzw. [Sito Eratostenesa](#). Jest to metoda kolejnego *wysiewania* liczb pierwszych spośród liczb naturalnych

większych od 1. Z danego zakresu liczb wybieramy najmniejszą z nich, zaznaczamy ją a następnie zaznaczamy wszystkie jej wielokrotności i wykreślamy je.

- W dzisiejszych czasach do poszukiwania nowych liczb pierwszych wykorzystuje się przede wszystkim komputery. Każdy może rozpocząć poszukiwania. Wystarczy dołączyć do międzynarodowego programu *GIMPS-Great Internet Mersenne Prime Search*.

Ile jest liczb pierwszych?

- Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Dowiódł tego Euklides, grecki matematyk, w IV w. p.n.e.
- Euklides wykazał, że dla dowolnie długiej listy kolejnych liczb pierwszych, po wymnożeniu liczb z tej listy i dodaniu 1, otrzymamy albo liczbę pierwszą spoza listy, albo liczbę złożoną, która rozkłada się na czynniki pierwsze spoza listy. Wobec tego lista nie może być pełna, musi być więc nieskończenie długa.

Hipoteza Goldbacha

- Hipoteza sformułowana ponad 250 lat temu przez pruskiego matematyka Christiana Goldbacha głosi, że każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Przypuszczenie to, nie zostało dotąd udowodnione, ani też obalone, pomimo licznych prób oraz wysokich nagród finansowych ufundowanych za jego udowodnienie.

Rozdział 3

Świetnie! Wszystko wiecie!

Materiał przedstawia fragment lekcji, w trakcie której nauczyciel odpytuje uczniów z rozkładu liczb na czynniki pierwsze i cech podzielności liczb naturalnych.

— Tomku, rozłóż proszę liczbę 6 oraz liczbę 18 na czynniki pierwsze.

— $6 = 2 \times 3$. $18 = 2 \times 3 \times 3$.

— Bardzo dobrze! Marku, na czym polega rozkład liczby na czynniki pierwsze?

— To zapisywanie liczby złożonej w postaci iloczynu liczb pierwszych.

— Świetnie! Stawiam wam po plusie. Przypominam, że rozkład liczb złożonych na czynniki pierwsze przyda nam się przy określaniu największego wspólnego dzielnika (NWD) dwóch liczb naturalnych oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych. A teraz cechy podzielności liczb naturalnych. Karolino, kiedy liczba jest podzielna przez 5?

— Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0 lub 5.

— A przez 2?

- Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 0, 2, 4, 6 albo 8.
- Przez 9?
- Jeśli cyfrą jedności tej liczby jest 9.
- Na pewno? Zastanów się.
- Yyy... Nie! Jeśli suma cyfr jest podzielna przez 9.
- Właśnie tak. A kiedy liczba jest podzielna przez 3?
- Jeśli suma cyfr jest podzielna przez 3. A jeśli cyfrą jedności liczby naturalnej dodatniej jest 0 to liczba jest podzielna przez 10!
- Bardzo dobrze!

Rozdział 4

Podsumowanie

Materiał podsumowuje audiobook. Przypomina czym są liczby pierwsze i złożone.

Liczby pierwsze to liczby naturalne, większe od 1, które dzielą się tylko przez 1 i samą siebie. Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki. Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi. Liczby złożone możemy rozkładać na czynniki pierwsze.

Polecenie 1

Liczba 73 939 133 jest dla matematyków bardzo ciekawą liczbą. Poprzez kolejne obcinanie cyfr od prawej strony otrzymujemy kolejno liczby:

7 393 913

739 391

73 939

7 393

739

73

7

Jak myślisz, co wspólnego mają ze sobą te liczby? Oczywiście poza faktem, że kolejne powstają przez obcięcie jednej cyfry z prawej strony?

Polecenie 2

Odszukaj, wykorzystując [Sito Eratostenesa](#), wszystkie [liczby pierwsze](#) w zakresie [1, 100].

Polecenie 3

Czy znasz cechy podzielności liczb przez 4, 6, 8? Jeśli nie, wyszukaj odpowiednie informacje w Internecie. Napisz 5 dowolnych liczb co najmniej trzycyfrowych i sprawdź, które z nich dzielą się przez 4, 6 lub 8. Skorzystaj z odpowiednich cech podzielności.

Podsumowanie

Liczby pierwsze to liczby naturalne, większe od 1, które dzielą się tylko przez 1 i samą siebie.

Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

Znajdźcie w Internecie strony związane z poszukiwaniem i odkrywaniem liczb pierwszych. Może uda się Wam odnaleźć następną?



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Praca domowa

Polecenie 4.1

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze należące do przedziału (1, 100).

Zadanie 2.

Odszukaj w Internecie program znajdujący liczby pierwsze i wyszukaj wśród nich pary: liczb pierwszych bliźniaczych, liczb pierwszych czworaczych, liczb pierwszych lustrzanych oraz liczb pierwszych palindromicznych.

Zadania

Wskazówka

W przypadku braku możliwości rozwiązania zadania z klawiatury lub trudności z odczytem przez czytnik ekranu skorzystaj z innej wersji zadania.

Ćwiczenie 1

Przyporządkuj podane liczby do odpowiedniej kategorii.

LICZBY PIERWSZE

14	21	59	-2	5	2
-6	0	65	1	13	33

LICZBY ZŁOŻONE

INNE LICZBY

Cw1

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Inna wersja zadania

Ćwiczenie 3

Połącz w pary.

liczba złożona

to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki

liczba 0

nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną i jest mniejsza od 1

liczby złożone

jest liczbą pierwszą

liczba 31

nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną i jest większa od 0

liczba 1

liczba naturalna, większa od 1, która dzieli się tylko przez 1 i samą siebie

liczba pierwsza

jest liczbą złożoną

liczba 15

to na przykład 9, 15, 28, 36

liczby pierwsze

to na przykład 3, 5, 13, 17

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Inna wersja zadania

Ćwiczenie 5

Oceń prawdziwość podanych informacji.

	Prawda	Fałsz
Liczby pierwsze to liczby, które dzielą się tylko przez 1 i samą siebie.	☐	☐
Liczby złożone to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki.	☐	☐
Liczba 0 jest liczbą złożoną.	☐	☐
Liczba 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną.	☐	☐
Liczba 11 jest piątą z kolei liczbą pierwszą większą od 1.	☐	☐
Jedyną liczbą parzystą pierwszą jest liczba 2.	☐	☐
Liczba 19 jest liczbą złożoną.	☐	☐
Liczb pierwszych większych od 7 i mniejszych od 29 jest 5.	☐	☐

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Inna wersja zadania

Słowniczek

Liczba pierwsza

to liczba naturalna, większa od 1, która dzieli się tylko przez 1 i przez samą siebie.

Liczba złożona

to liczba naturalna, większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.

Sito Eratostenesa

algorytm wyznaczania liczb pierwszych z zadanego przedziału $[2, n]$ przypisywany Eratostenesowi z Cyreny.

Powrót do e-podręcznika

E-podręcznik „Odkryj, zrozum, zastosuj...”

<https://www.epodreczniki.pl/reader/c/128788/v/latest/t/student-canon>

1.9. Liczby pierwsze i liczby złożone

<https://www.epodreczniki.pl/reader/c/128788/v/latest/t/student-canon/m/ioVAGILVx2>

1.10. Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze

<https://www.epodreczniki.pl/reader/c/128788/v/19/t/student-canon/m/iNFMQFfPFH>

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.