



Wykres funkcji $f(x)=a/x$

Wykres funkcji opisującej proporcjonalność odwrotną. Hiperbola. Własności funkcji $f(x)=a/x$.
2 ilustracje interaktywne: rysowanie wykresu funkcji $f(x)=1/x$ i $-1/x$.

Rysowanie i określanie własności funkcji $f(x)=a/x$. Ilustracja interaktywna: wykres funkcji $y = a / x$ w zależności od współczynnika a . Zasób zawiera ćwiczenie.

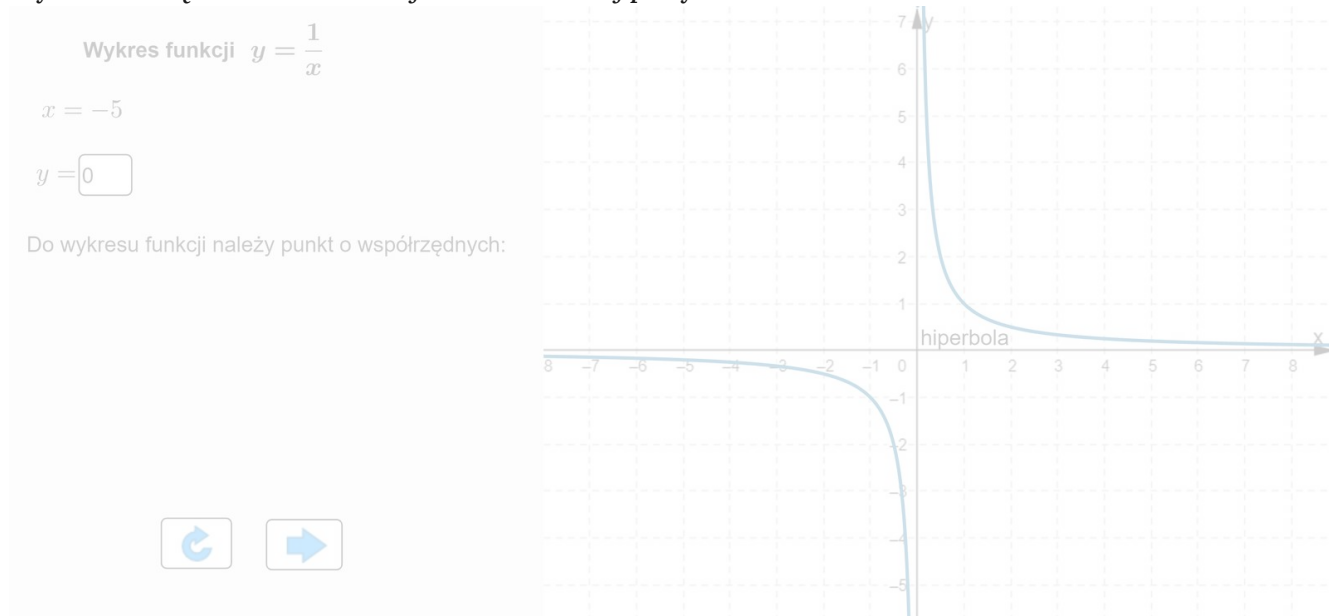
Wykres funkcji $f(x)=a/x$

W tym materiale zajmiemy się funkcjami opisanymi takim samym wzorem jak proporcjonalność odwrotna, czyli $f(x) = \frac{a}{x}$, ale określonymi dla dowolnej liczby $x \neq 0$. Przyjmiemy, że współczynnik $a \neq 0$.

Zastanówmy się, jak wygląda wykres tej funkcji.

Przykład 1

Odczytaj z wykresu lub oblicz na podstawie wzoru jakie wartości przyjmuje funkcja $y = \frac{1}{x}$ dla podanych argumentów. Aby sprawdzić swoją odpowiedź, wpisz w puste pole wyznaczoną wartość funkcji oraz naciśnij przycisk.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pbfh3SsUp>

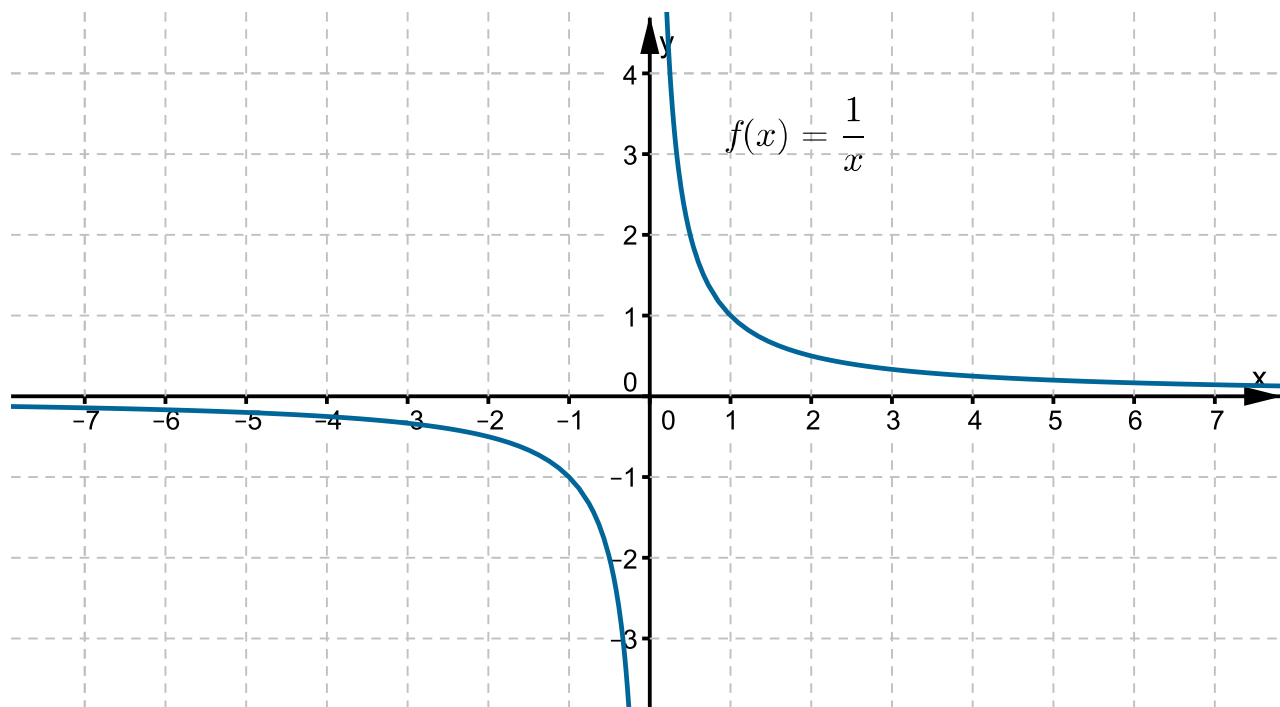
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykres znajdujący się w powyższym przykładzie nazywamy hiperbolą. Ta hiperbola składa się z dwóch ramion położonych symetrycznie względem punktu (0, 0). Charakterystyczne dla tego wykresu jest to, że każde z jego ramion zbliża się do osi układu współrzędnych, ale w żadnym punkcie nie przecina ani osi X, ani Y.

Przyjrzymy się innym własnościom funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Przykład 2

Odczytaj z wykresu własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

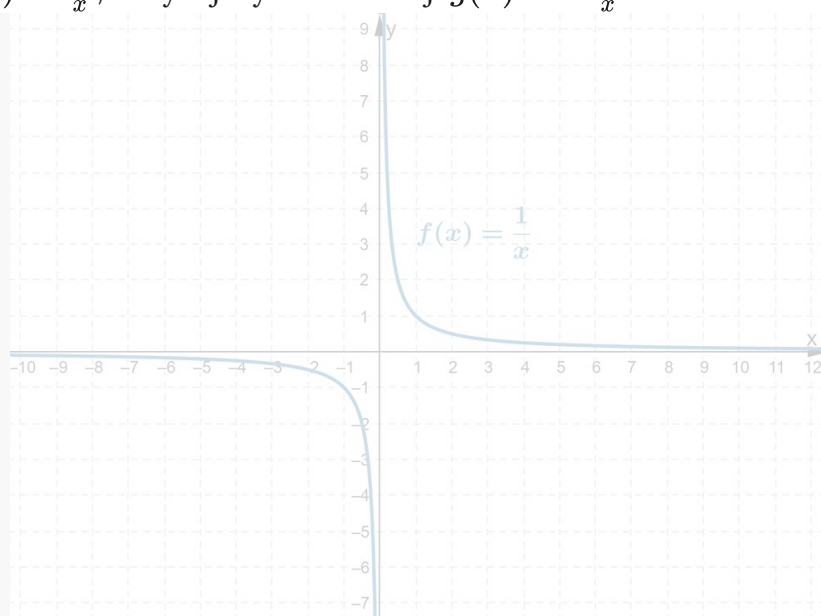
- Ramiona hiperboli leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych.
- Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (wykres funkcji nie przecina osi Y).
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych (wykres funkcji nie ma punktów wspólnych z osią X).
- Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.
- Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(0, +\infty)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(-\infty, 0)$.

Przykład 3

Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, narysuj wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$.

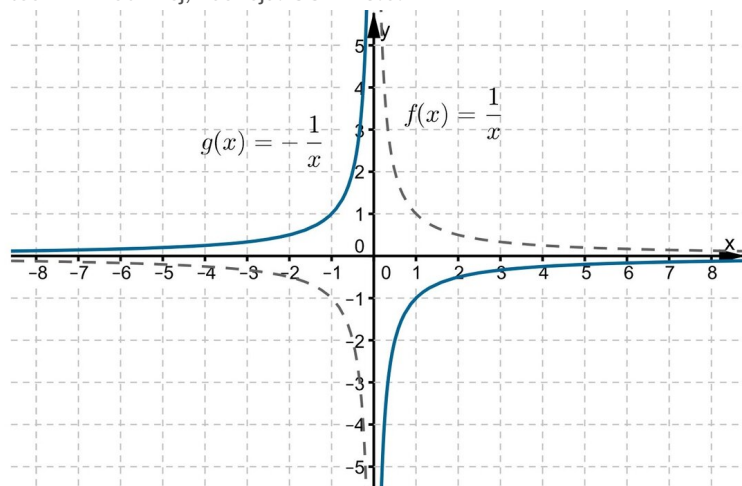
Wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$

Zauważmy, że $g(x) = -f(x)$,
zatem wystarczy przekształcić hiperbolę
symetrycznie względem osi Ox .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pbfh3SsUp>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

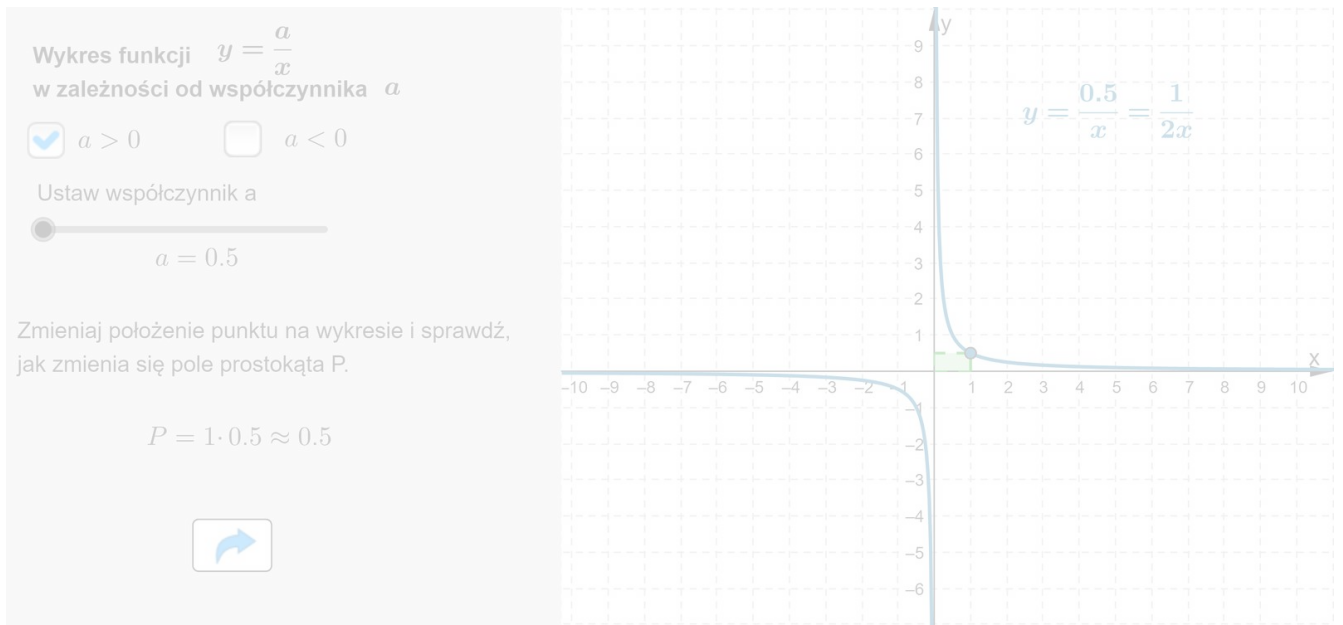
Odczytamy z wykresu własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$.

- Ramiona hiperboli leżą w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Funkcja g jest określona dla wszystkich $x \neq 0$ (wykres funkcji nie przecina osi Y).
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja g nie ma miejsc zerowych (wykres funkcji nie ma punktów wspólnych z osią X).
- Funkcja g jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.
- Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(-\infty, 0)$ oraz wartości ujemne dla argumentów z przedziału $(0, +\infty)$.

Przykład 4

Wykorzystując poniższy aplet sprawdź:

- w jaki sposób wartość współczynnika a wpływa na położenie wykresu,
- jaki związek zachodzi pomiędzy polem prostokąta wyznaczonego przez punkt wykresu a współczynnikiem a .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pbfh3SsUp>

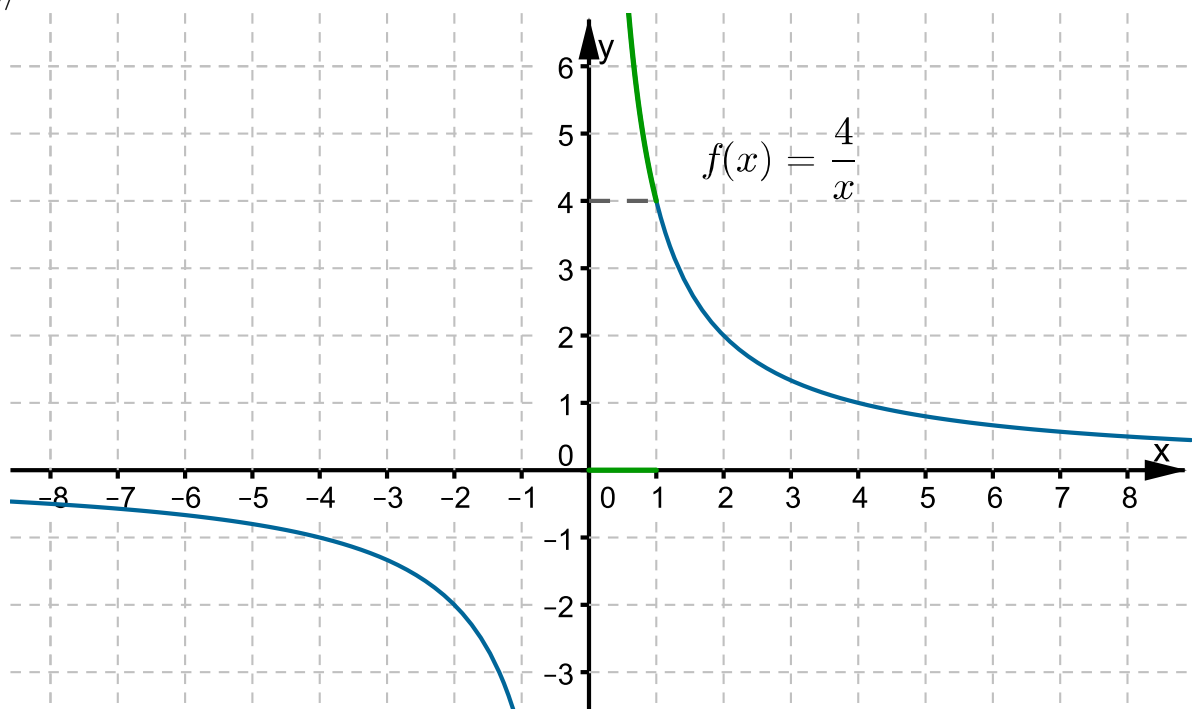
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź:

- Dla dodatniego współczynnika a hiperbola leży w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, a dla ujemnego współczynnika a hiperbola leży w drugiej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych.
- Pole każdego prostokąta jest równe danej wartości współczynnika a .

Przykład 5

Narysuj wykres $f(x) = \frac{4}{x}$. Odczytaj z wykresu najmniejszą wartość funkcji w przedziale $(0, 1)$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ w przedziale $(0, 1)$ jest równa 4.

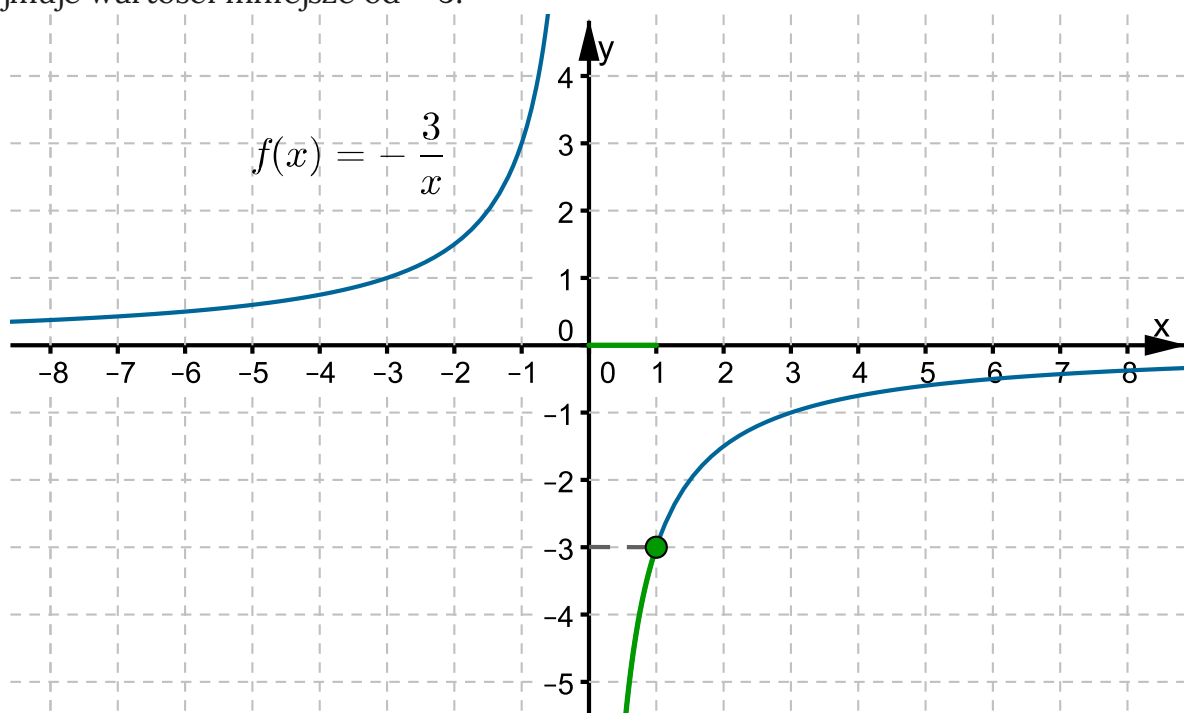
Przykład 6

Punkt $P = (3, -2)$ leży na wykresie proporcjonalności odwrotnej $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz wartość współczynnika a .

Z tego, że punkt $P = (3, -2)$ leży na wykresie $f(x) = \frac{a}{x}$, wynika, że $-2 = \frac{a}{3}$, czyli $a = -6$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{3}{x}$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od -3 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź. Funkcja $f(x) = -\frac{3}{x}$ przyjmuje wartości mniejsze od -3 dla argumentów z przedziału $(0, 1)$.

Ćwiczenie 1



Połącz w pary wzór hiperboli z punktem, który do niej należy.

$$y = \frac{3}{x+2} + 2$$

$$(0, 0)$$

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

$$(-3, -1)$$

$$y = \frac{2}{x-\frac{1}{2}} + 4$$

$$(-1, 1)$$

$$y = -\frac{4}{x-1} + 4$$

$$(2, 0)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.