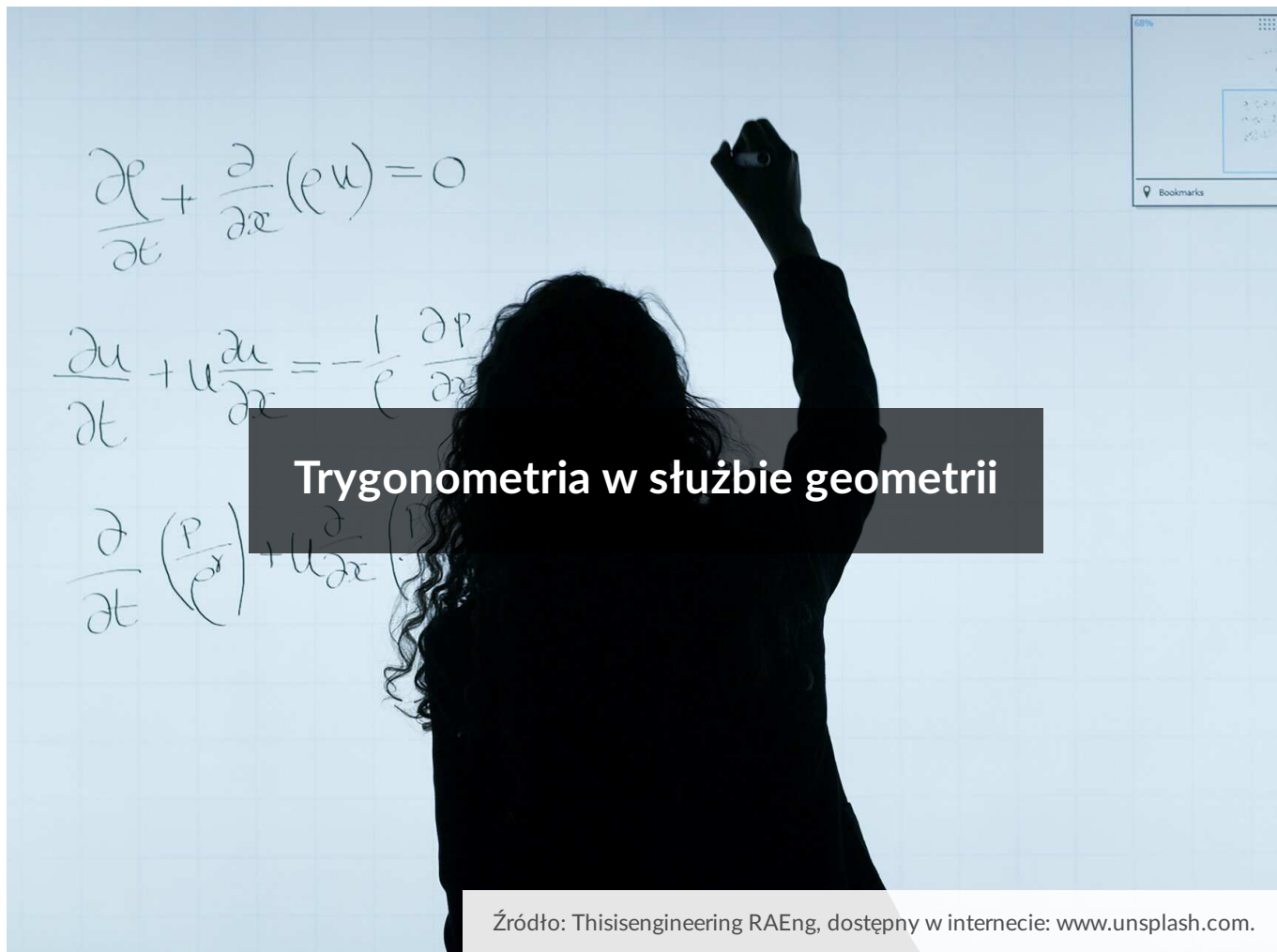




Trygonometria w służbie geometrii

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Trygonometria w służbie geometrii

Źródło: Thisisengineering RAEng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Trygonometria to dział nauki zajmujący się związkami miarowymi pomiędzy bokami i kątami trójkątów oraz funkcjami trygonometrycznymi.

A skoro mowa o trójkącie i funkcjach, trudno nie nawiązać do geometrii. I tym właśnie zajmiemy się w tej lekcji – wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) do rozwiązywania zadań z geometrii.

Twoje cele

- Wykorzystasz trygonometrię w opisie związków miarowych na płaszczyźnie.
- Obliczysz pole wskazanej figury na podstawie zaprezentowanych danych.
- Obliczysz wskazany kąt na podstawie podanych danych.
- Podasz wysokość wskazanego budynku wykorzystując zdobytą wiedzę.

Przeczytaj

Już wiesz

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej.

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB , w którym tangens kąta ABC jest równy $\frac{24}{7}$ i $|AC| = 9,6$. Obliczymy pole koła opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Tangens kąta ABC to iloraz $\frac{|AC|}{|BC|}$,

$$\text{czyli: } \frac{9,6}{|BC|} = \frac{24}{7},$$

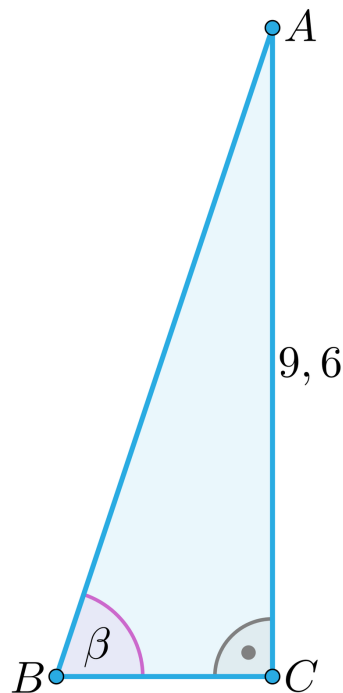
$$|BC| = 2,8$$

Z twierdzenia Pitagorasa: $|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$

a zatem:

$$|AB| = \sqrt{(2,8)^2 + (9,6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ponieważ AB jest średnicą koła opisanego na trójkącie ABC , więc promień tego koła jest równy 5, a pole koła wynosi $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$.

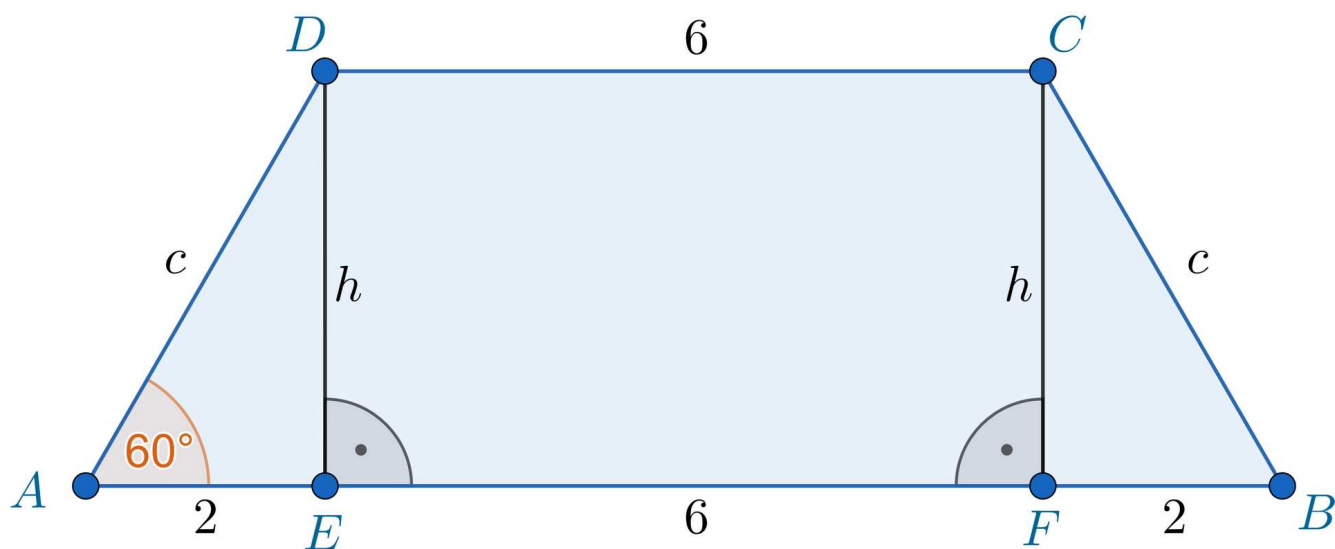


Przykład 2

Obliczymy pole i obwód trapezu równoramiennego, w którym podstawy mają długości 6 i 10, a ramię tworzy z dłuższą podstawą kąt 60° . Ustalimy też, jaka jest wartość tangensa kąta nachylenia przekątnej tego trapezu do jego dłuższej podstawy.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Wysokości CF i DE dzielą trapez na prostokąt i dwa przystające trójkąty prostokątne, w których jedna z przyprostokątnych ma długość 2, a przyległy do niej kąt ostry ma miarę 60° .

Ważne!

Można też od razu zauważyć, że po sklejeniu trójkątów ADE i BCF wzdłuż dłuższej przyprostokątnej otrzymujemy trójkąt równoboczny.

Wobec tego:

$$\frac{h}{2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

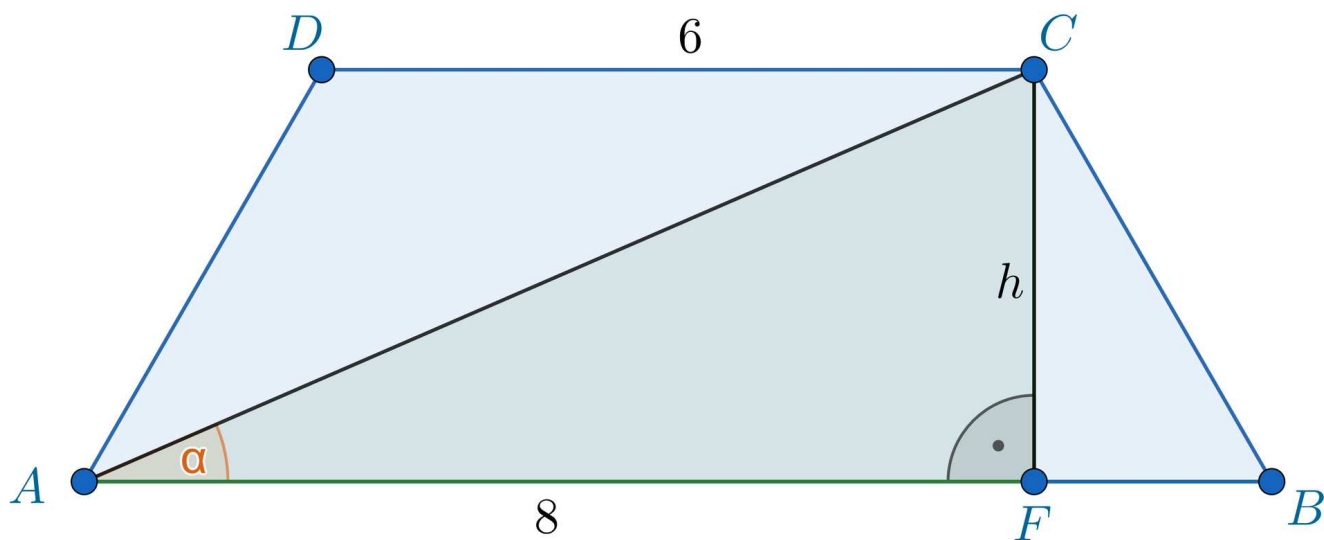
stąd $h = 2\sqrt{3}$, a także $\frac{2}{c} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, czyli $c = 4$.

Pole trapezu jest zatem równe:

$$\frac{1}{2}(10 + 6) \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3},$$

a obwód wynosi 24.

Oznaczmy z kolei przez α kąt nachylenia przekątnej AC do podstawy AB .



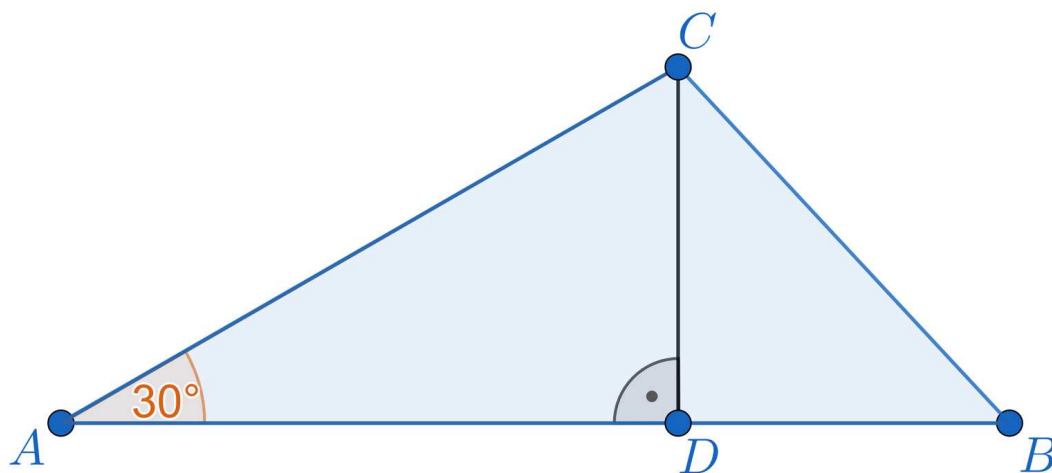
W trójkącie prostokątnym AFC mamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Przykład 3

W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$, $|AC| = 6$ i $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$. Obliczymy pole tego trójkąta.

Rozwiązanie

Poprowadźmy wysokość CD z wierzchołka C na bok AB , jak na rysunku.



W trójkącie prostokątnym ADC mamy:

$|AC| = 6$ oraz $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| = 30^\circ$.

Zgodnie z definicją sinusa:

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|CD| = \frac{1}{2}|AC| = 3$$

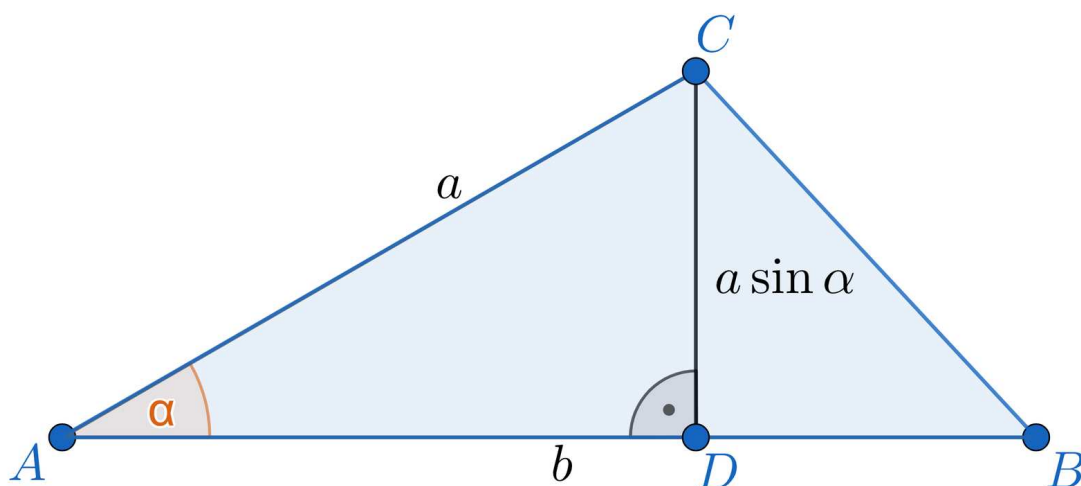
i w konsekwencji pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

Twierdzenie: o polu trójkąta

Pole trójkąta o bokach a oraz b i kącie ostrym α zawartym pomiędzy nimi jest równe:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

Dowód



Niech w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku α będzie ostry i niech $|AB| = b$ oraz $|AC| = c$.

Opuśćmy na bok AB wysokość z wierzchołka C .

Wówczas wysokość CD jest równa:

$$|CD| = |AC| \cdot \sin \sphericalangle BAC = a \sin \alpha.$$

Zatem pole trójkąta ABC jest równe:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

Przykład 4

Obliczymy przybliżoną wartość pola trójkąta o bokach $a = 4$, $b = 7$ oraz kącie $\alpha = 17^\circ$, zawartym między tymi bokami, podając wynik w zaokrągleniu do części setnych.

Rozwiązanie

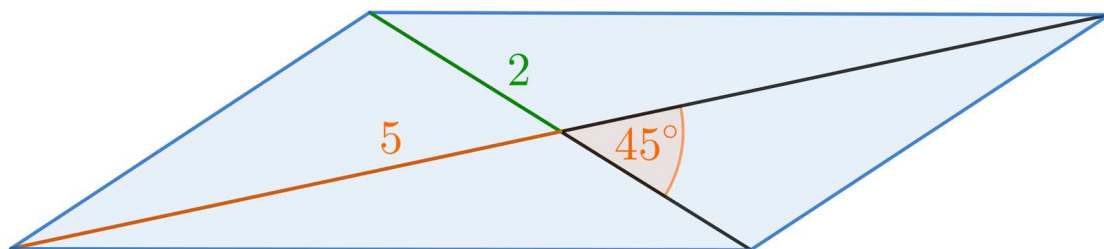
Mamy:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 17^\circ = 14 \sin 17^\circ \approx 4,09.$$

Przykład 5

Obliczmy pole równoległoboku, w którym przekątne o długościach 4 i 10 przecinają się pod kątem 45° .

Rozwiązanie



Zauważmy najpierw, że przekątne dzielą równoległobok na cztery trójkąty o równych polach (wynika to stąd, że jedna przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające, a druga przekątna dzieli powstałe trójkąty wzdłuż środkowej). W każdym z tych czterech trójkątów możemy wyróżnić dwa boki o długościach odpowiednio 2 i 5, a w dwóch z nich kąt między tymi odcinkami jest równy 45° .

Stąd pole równoległoboku jest równe:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ = 10\sqrt{2}.$$

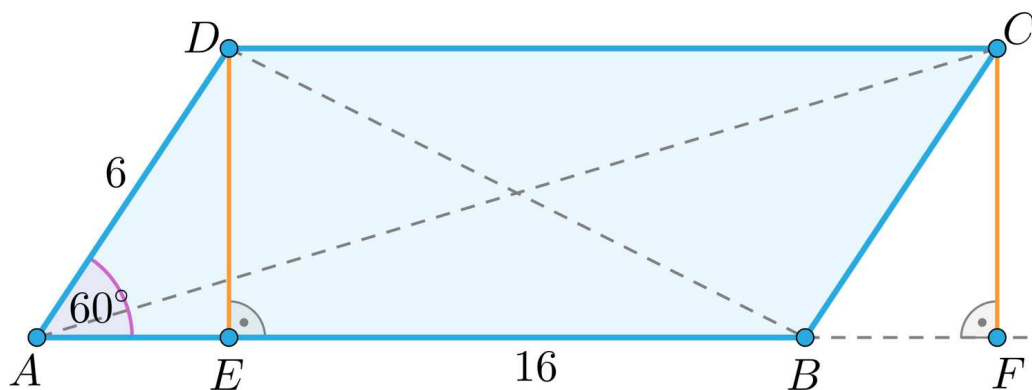
Pole równoległoboku jest równe $10\sqrt{2}$.

Przykład 6

Obliczmy długości przekątnych równoległoboku $ABCD$, którego kąt ostry przy wierzchołku A ma miarę 60° , a boki AD i AB mają długości odpowiednio 6 i 16.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



W trójkącie prostokątnym ADE :

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{|AE|}{|AD|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

stąd:

$$|DE| = 3\sqrt{3}, \quad |AE| = 3.$$

Wobec tego:

$$|BE| = 16 - 3 = 13 \text{ i } |AF| = 16 + 3 = 19.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach DEB i AFC , mamy:

$$|BD| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 13^2} = \sqrt{27 + 169} = \sqrt{196} = 14,$$

$$|AC| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 19^2} = \sqrt{27 + 361} = \sqrt{388} = 2\sqrt{97}.$$

Przekątne tego równoległoboku mają długości 14 oraz $2\sqrt{97}$.

Słownik

trójkąt równoboczny

trójkąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość, szczególny przypadek trójkąta równoramiennego

trójkąty przystające

trójkąty, w których odpowiednie boki są równe i odpowiednie kąty mają równe miary

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie rozwiąż polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D13KNqeBc>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej trygonometrii w służbie geometrii.

Dla zainteresowanych

Przykład 4 z animacji ma swój ważny odpowiednik w astronomii, gdzie podobna metoda jest używana do pomiaru odległości stosunkowo bliskich gwiazd. Różnym położeniom chłopca i dziewczyny odpowiada wówczas różne położenie Ziemi w jej obiegu wokół Słońca. Z tego, że bliskie gwiazdy widać pod nieco innym kątem w zimie, a pod innym w lecie, można już wywnioskować, jakie są ich odległości od Słońca.

Polecenie 2

Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długości 5 cm i 12 cm, a miara kąta między nimi stanowi $\frac{1}{5}$ sumy miar pozostałych kątów wewnętrznych.

Polecenie 3

Dany jest romb, w którym dłuższa przekątna jest równa 10, a jeden z kątów ma miarę 40° . Oblicz pole rombu. Wynik podaj w zaokrągleniu do jednego miejsca po przecinku.

Polecenie 4

W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 7 i 25, a kąt między dłuższą podstawą a ramieniem ma miarę α . Oblicz długość przekątnej tego trapezu, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż prawidłową odpowiedź. Na trójkącie prostokątnym ABC , o kącie prostym przy wierzchołku C , opisano koło o polu 25π . Jeżeli $\sin \sphericalangle ABC = 0,8$, to:

☐ $|AC| = 4$

☐ $|AC| = 8$

☐ $|AC| = 6$

☐ $|AC| = 3$

Ćwiczenie 2



Oblicz pole dwunastokąta foremnego, na którym można opisać okrąg o promieniu 10.

Ćwiczenie 3



W trójkącie dwa boki mają długość 5, a tangens kąta między nimi jest równy 2. Wskaż zdania prawdziwe.

☐ Sinus tego kąta wynosi $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

☐ Cosinus tego kąta wynosi $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

☐ Pole trójkąta wynosi $2\sqrt{5}$.

☐ Pole trójkąta wynosi $5\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 4



Obwód prostokąta, którego przekątne długości 16 przecinają się pod kątem 60° , jest równy:

☐ 64

☐ $4(4\sqrt{3} + 2)$

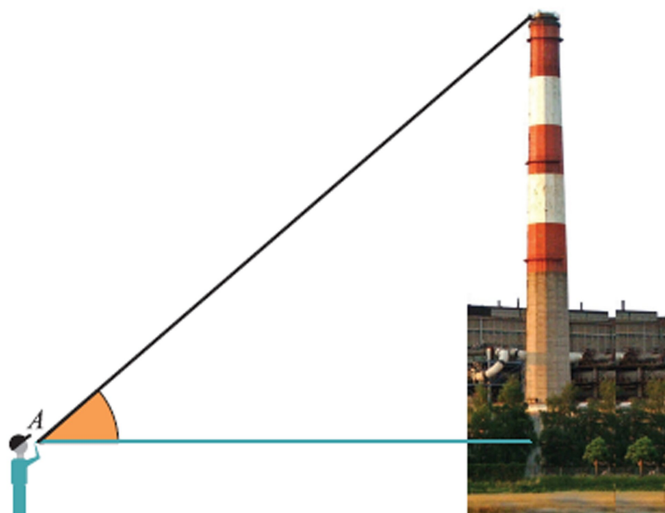
☐ $16(\sqrt{3} + 1)$

☐ $4(2\sqrt{3} + 4)$

Ćwiczenie 5



Patrząc z punktu A , obserwator widział komin pod kątem 30° . Kiedy zbliżył się do komina o 50 m, to widział go pod kątem 60° . Jeżeli podstawa komina znajduje się na wysokości wzroku obserwatora, to odległość od punktu A do podstawy komina jest równa:



☐ 85 m

☐ 100 m

☐ 75 m

☐ 90 m

Ćwiczenie 6



W trapezie prostokątnym $ABCD$ podstawy AB i CD mają długości odpowiednio 11 i 5, a prostopadły do nich bok AD ma długość 8. Wtedy cosinus kąta ostrego przy wierzchołku B jest równy:

☐ 0,8

☐ 0,75

☐ 0,6

☐ 0,5

Ćwiczenie 7



Pole trójkąta ostrokątnego ABC jest równe 6, bok AB ma długość 3, a bok AC - długość 10. Wynika stąd, że miara kąta BAC jest:



Ćwiczenie 8



Koło o polu równym 3π jest wpisane w romb o boku x , którego kąt ostry ma miarę 60° . Wówczas:

☐ $x = 3$

☐ $x = 2$

☐ $x = 1$

☐ $x = 4$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski, Witold Sadowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Trygonometria w służbie geometrii

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° ;
- 5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$;
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje trygonometrię w opisie związków miarowych na płaszczyźnie,
- oblicza pole wskazanej figury na podstawie zaprezentowanych danych,
- oblicza miarę wskazanego kąta na podstawie podanych danych,
- wyznacza długość wskazanego odcinka wykorzystując zdobytą wiedzę.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa,
- metoda kota i myszy,
- technika świateł drogowych,
- technika niedokończonych zdań.

Formy pracy:

- praca w parach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i słuchawkami/ tablety/smartfony z dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie przed lekcją zapoznają się z przykładami 1 – 6 z sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat oraz wskazuje cel zajęć.
2. Wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozmawia z uczniami na temat treści zawartych w sekcji „Przeczytaj”. Stara się, aby uczniowie sobie na wzajem wyjaśnili wszelkie wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla animację. Wybrany uczeń rozwiązuje Polecenie 3.
3. Uczniowie w parach, metodą kot i mysz, rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel przypomina uczniom cel lekcji i kryteria sukcesu. Pyta o stopień ich realizacji używając techniki świateł drogowych.

2. Nauczyciel może poprosić również uczniów o podsumowania lekcji w kontekście nowych umiejętności, które nabyli na lekcji, wykorzystując jeszcze raz na tej lekcji technikę zdań niedokończonych.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenie 2 i 4 z sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- [Wprowadzenie do trygonometrii](#)
- [Sinus dowolnego kąta](#)
- [Cosinus dowolnego kąta](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania. Może ją również wykorzystać jako uzupełnienie tematu: „Obliczanie pól i obwodów wielokątów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych”.