Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Źródło: Bill Kasman, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny jest jedną z najczęściej omawianych brył w szkole. Okazuje się, że jest również najczęściej spotykaną bryłą w budownictwie. W tym materiale skupimy się na umiejętności obliczania jego pola powierzchni. Przyda nam się to w życiu codziennym, kiedy będziemy musieli obliczyć np. ilość materiału potrzebnego na pokrycie dachu lub altany.

Źródło: Pixabay.com, Wikipedia.com, *1. The Shard, Londyn, Wielka Brytania 2. Budynek radia, Bratysława, Słowacja 3. Pyramid Arena, Memphis, USA 4. Luwr, Paryż, Francja*, licencja: CC BY 4.0.

Twoje cele

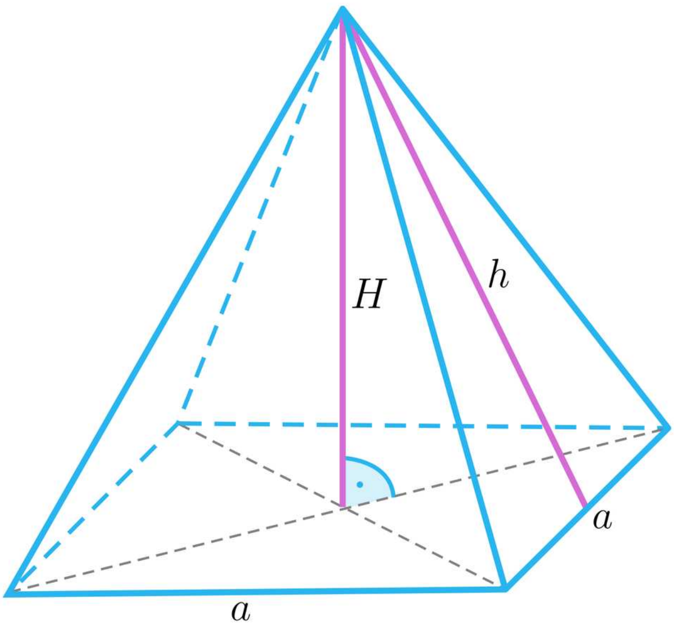
- Wykorzystasz poznany wzór w zadaniach, obliczysz długości odcinków ostrosłupa, znając jego pole i odwrotnie.
- Wykorzystasz trygonometrię i optymalizację w zadaniach.

Przeczytaj

Wzór na pole powierzchni ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b$$

gdzie:
P_p – pole podstawy,
P_b – pole powierzchni bocznej.



Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat.

$$P_p = a^2.$$

Ściany boczne są zaś przystającymi trójkątami równoramiennymi o wysokości h. Zatem:

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h.$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego możemy więc zapisać w postaci:

$$P_c = a^2 + 2 \cdot a \cdot h.$$

Przykład 1

Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 i krawędzi bocznej 8.

Rozwiązanie:

Obliczymy najpierw pole podstawy tego ostrosłupa: $P_p = 6^2 = 36$.

Pole powierzchni bocznej obliczymy korzystając ze wzoru Herona. Wyznaczymy zatem połowę obwodu trójkąta będącego ścianą boczną: $p = \frac{6+8+8}{2} = 11$. Stąd:

$$P_b = 4\sqrt{11 \cdot (11-6) \cdot (11-8) \cdot (11-8)} = 4\sqrt{11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3} = 12\sqrt{55}.$$

Ostatecznie:

$$P_c = 36 + 12\sqrt{55}$$

Przykład 2

Uzasadnimy, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wszystkie krawędzie są równej długości, jest $\sqrt{3}$ razy większe od pola podstawy.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa przez a.

Pole podstawy jest równe: $P_p = a^2$.

Ponieważ ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o boku długości a, to pole powierzchni bocznej jest równe: $P_b = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Zatem: $\frac{P_b}{P_p} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a^2} = \sqrt{3}$, co należało uzasadnić.

Przykład 3

Obliczymy długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 8 a pole powierzchni całkowitej wynosi 336.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa przez a ($a > 0$). Zatem:

$$336 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 8$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe: $a^2 + 16a - 336 = 0$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-336) = 256 + 1344 = 1600; \sqrt{\Delta} = 40$$

Zatem: $a_1 = \frac{-16-40}{2} < 0$ lub $a_2 = \frac{-16+40}{2} = 12$.

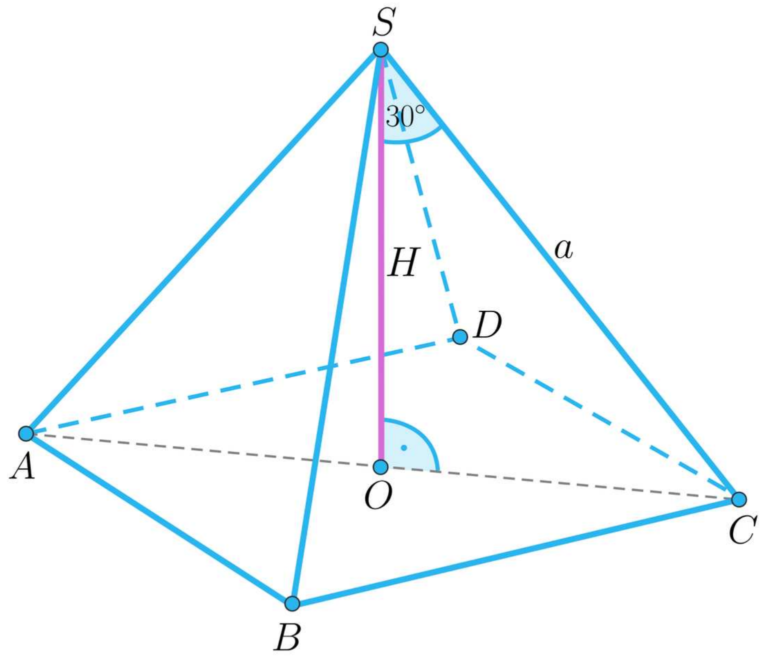
Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 12.

Przykład 4

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość a i tworzy z wysokością kąt o mierze 30°. Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Trójkąt SOC jest prostokątny o kątach 30°, 60°, 90°. Z zależności pomiędzy bokami tego trójkąta mamy:

$|OC| = \frac{1}{2}a$

$|SO| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

Przekątna podstawy ma więc długość:

$|AC| = 2 \cdot \frac{1}{2}a = a$

Obliczymy więc długość boku kwadratu:

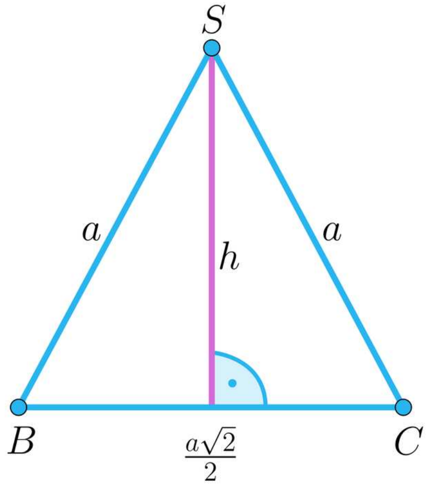
$a = |BC| \cdot \sqrt{2}$

$|BC| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Policzymy więc pole podstawy ostrosłupa:

$P_p = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$

Zajmijmy się teraz polem powierzchni bocznej. Narysujmy jedną ścianę boczną. Jej wysokość oznaczmy jako h.



$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$h^2 = a^2 - \frac{2}{16}a^2$

$h^2 = \frac{14}{16}a^2$

$h = \sqrt{\frac{7}{8}a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Zatem pole powierzchni bocznej wynosi:

$P_b = 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^2\sqrt{28}}{4} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi:

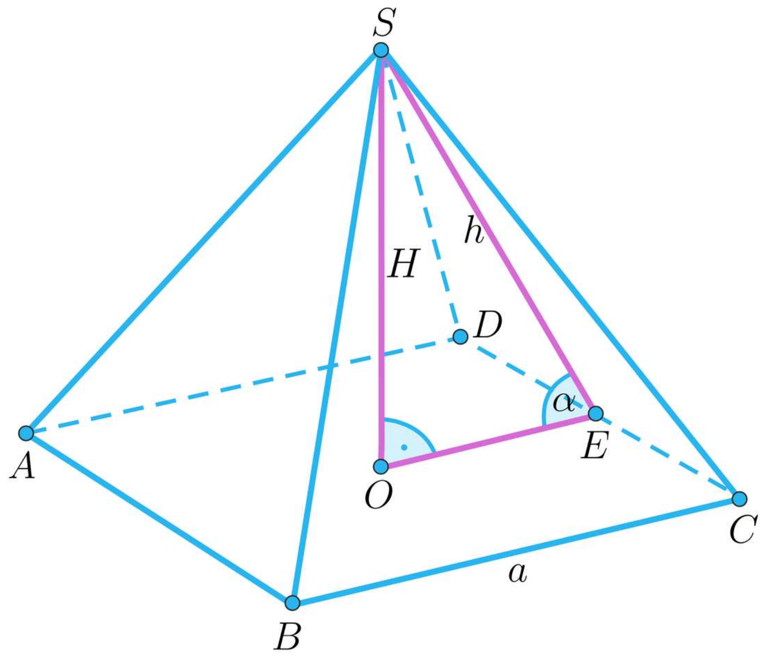
$P_c = \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2}a^2\left(1 + \sqrt{7}\right).$

Przykład 5

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o polu powierzchni bocznej P ściana boczna nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem α, takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie:
H – wysokość ostrosłupa,
h – wysokość ściany bocznej,
a – długość krawędzi podstawy.



Trójkąt SOE jest prostokątny oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, zatem:

$\frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$

$3H = 2a$

$H = \frac{2}{3}a$

Z treści zadania wiemy, że $P_b = P$, czyli

$2ah = P$

$h = \frac{P}{2a}$

Zatem z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SOE mamy:

$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$

$\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{P}{2a}\right)^2$

$\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{P^2}{4a^2}$

$\frac{25}{36}a^2 = \frac{P^2}{4a^2}$

$\frac{100}{36}a^4 = P^2$

$a^4 = \frac{36}{100}P^2$

$a^2 = \frac{6}{10}P$

$a = \sqrt{\frac{6}{10}P} = \frac{\sqrt{60P}}{10} = \frac{2\sqrt{15P}}{10} = \frac{\sqrt{15P}}{5}$

Zatem pole podstawy tego ostrosłupa wynosi:

$P_p = \left(\frac{\sqrt{15P}}{5}\right)^2 = \frac{15P}{25} = \frac{3P}{5}$

Zatem pole powierzchni całkowitej bryły jest równe:

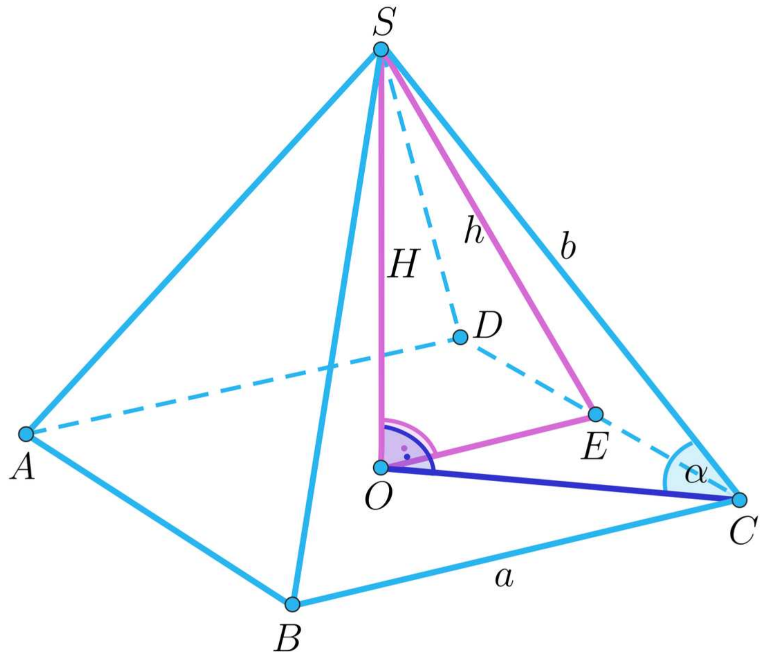
$P_c = P + \frac{3P}{5} = 1,6P.$

Przykład 6

Krawędź boczna b ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Obliczymy pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:
H – wysokość ostrosłupa,
h – wysokość ściany bocznej,
a – długość krawędzi podstawy.



Trójkąt SOC jest prostokątny. $|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Z funkcji trygonometrycznych mamy więc:

$\frac{a\sqrt{2}}{2b} = \cos\alpha$ oraz $\frac{H}{b} = \sin\alpha$

$\frac{a\sqrt{2}}{2} = b \cdot \cos\alpha$ oraz $H = b \cdot \sin\alpha$

$a = b\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$

Aby obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa, potrzebujemy wysokości ściany bocznej h.

Trójkąt SOE jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$$

$$h^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha + \left(\frac{b\sqrt{2} \cdot \cos \alpha}{2}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}b^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$h^2 = \frac{1}{2}b^2\left(2\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)$$

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Zatem:

$$h^2 = \frac{1}{2}b^2\left(2\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha\right)$$

$$h^2 = \frac{1}{2}b^2\left(\sin^2 \alpha + 1\right)$$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}b^2\left(\sin^2 \alpha + 1\right)}$$

$$h = b\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + 1}{2}}$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi więc:

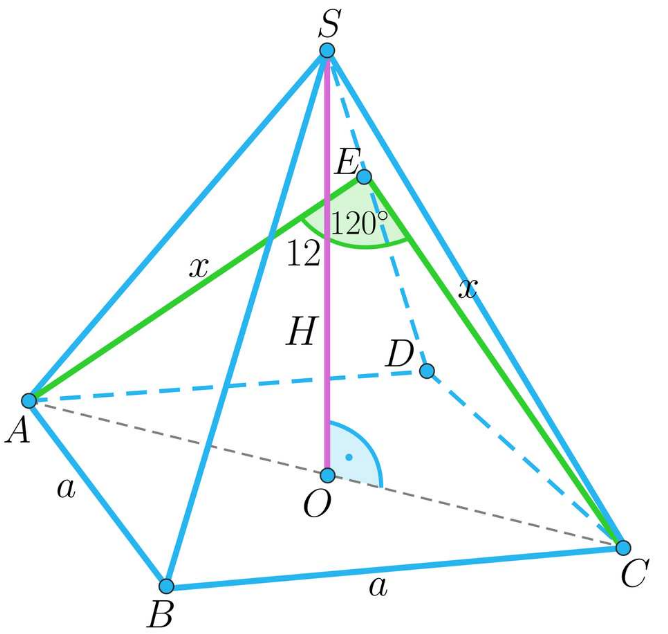
$$P_b = 2ah = 2 \cdot b\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \cdot b\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + 1}{2}} = 2b^2 \cdot \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + 1}.$$

Przykład 7

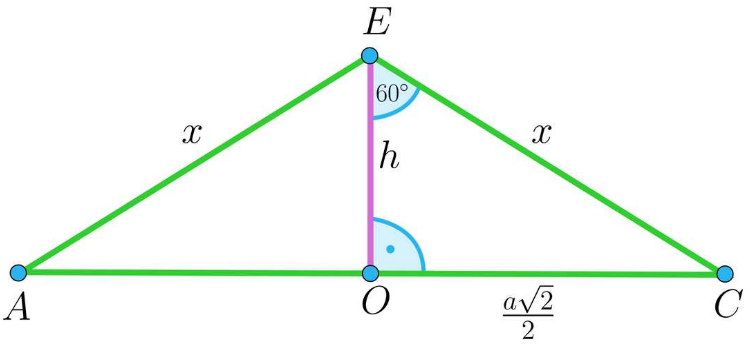
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa 12, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120°. Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:
a – długość krawędzi podstawy,
x – długości ramion trójkąta AEC, czyli wysokości ścian bocznych.



Poprowadźmy wysokość trójkąta AEC dzielącą kąt 120° na dwie równe części.



Trójkąt EOC jest prostokątny o kątach 30°, 60°, 90°. Z zależności pomiędzy bokami tego trójkąta mamy:

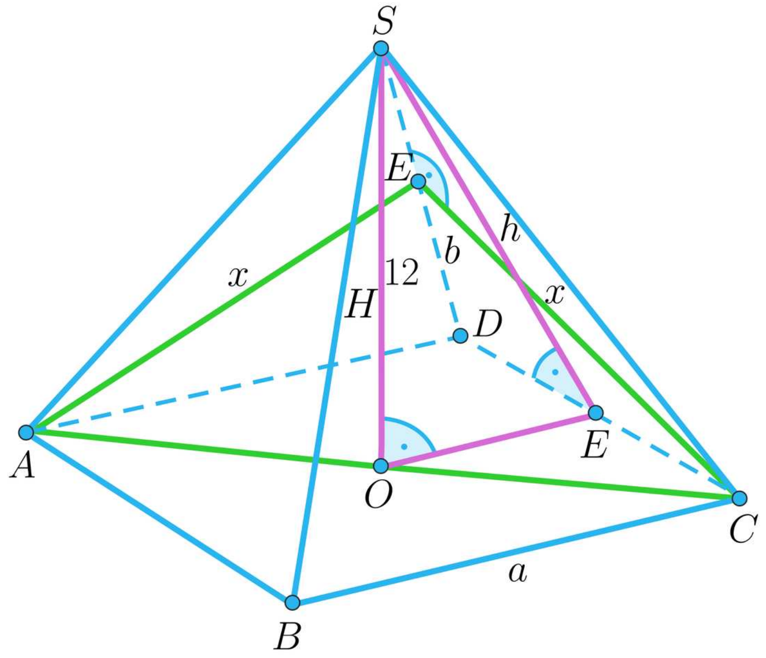
$|EO| = \frac{1}{2}x$

$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$

$a\sqrt{2} = x\sqrt{3}$

$x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Zaznaczmy wysokość ściany bocznej na naszym rysunku. Oznaczmy ją jako h, a długość krawędzi bocznej jako b.



Trójkąt SOE jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$12^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$

$144 + \frac{1}{4}a^2 = h^2$

$h = \sqrt{144 + \frac{1}{4}a^2}$

Obliczmy pole ściany bocznej na dwa sposoby:

$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}xb$

$a\sqrt{144 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot b$

$b = \sqrt{144 + \frac{1}{4}a^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{24 + \frac{1}{24}a^2}$

Trójkąt SOC jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$12^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2$

$144 + \frac{1}{2}a^2 = 9 \cdot \left(24 + \frac{1}{24}a^2\right)$

$144 + \frac{1}{2}a^2 = 216 + \frac{9}{24}a^2$

$a^2 = 576$

$a = 24$

Wysokość ściany bocznej ma zatem długość:

$h=\sqrt{144+\frac{1}{4}\cdot 24^2}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$

Obliczmy pole powierzchni całkowitej:

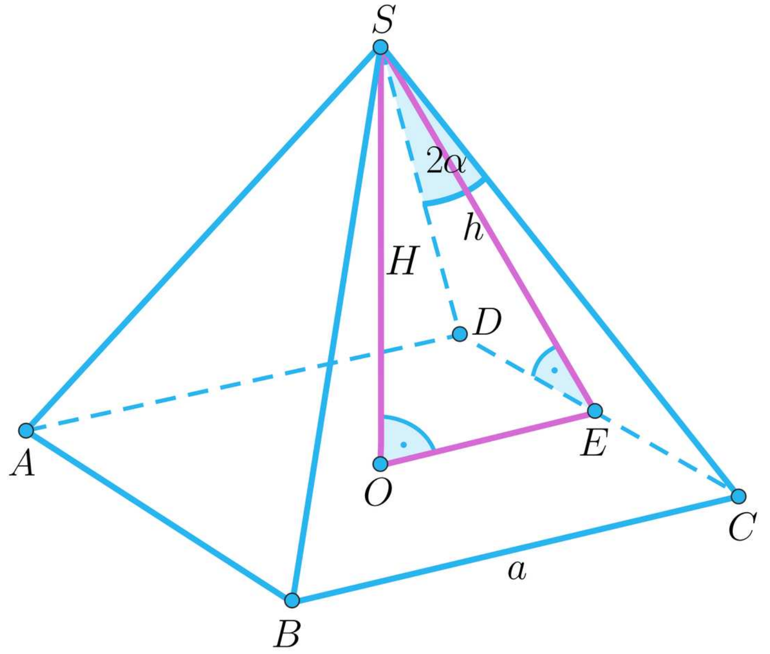
$P_c=24^2+2\cdot 24\cdot 12\sqrt{2}=576+576\sqrt{2}=576\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$

Przykład 8

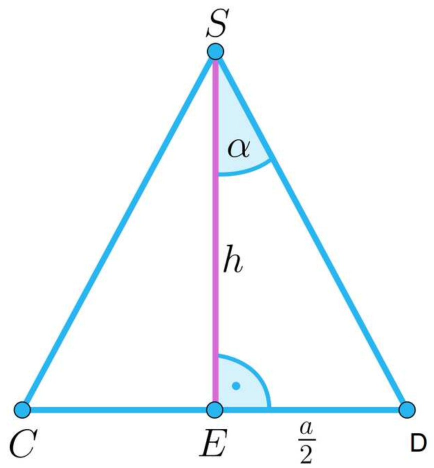
Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe S. Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 2α. Obliczymy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie:
H – wysokość ostrosłupa,
h – wysokość ściany bocznej,
a – długość krawędzi podstawy.



Wysokość ściany bocznej podzieliła kąt płaski na dwie równe części. Narysujmy tę ścianę:



Trójkąt SED jest prostokątny, więc z funkcji tangens mamy:

$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \operatorname{tg}\alpha$

$a = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Ponadto, wiemy z treści zadania, że pole tego trójkąta wynosi S, co oznacza, że

$\frac{1}{2}ah = S$

$\frac{1}{2} \cdot 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot h = S$

$h^2 = \frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}$

$h = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}}$

$a = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{S \cdot \operatorname{tg}\alpha}$

Zatem pole podstawy ostrosłupa wynosi:

$P_p = 4S \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi: $P_b = 4S$

Zatem: $P_c = 4S \cdot \operatorname{tg}\alpha + 4S = 4S(1 + \operatorname{tg}\alpha)$.

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, w którym podstawa jest wielokątem foremnym

pole ostrosłupa

pole powierzchni całkowitej wszystkich ścian ostrosłupa

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Oglądając galerię zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zamieszczone tam zadanie, a w kolejnym kroku porównać rozwiązania.

Polecenie 2

Oblicz największe możliwe pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi bocznej, której długość wynosi 10.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Odległość spodka wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od jego krawędzi bocznej jest równa d, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 8

Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości a i krawędzi bocznej długości k.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kiełczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzór na pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego w zadaniach, oblicza długości odcinków ostrosłupa znając jego pole i odwrotnie;
- oblicza pole ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, znając wartości funkcji trygonometrycznych odpowiednich kątów w ostrosłupie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- liga zadaniowa,
- technika świateł drogowych.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie przypominają własności ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie, jak policzyć pole takiego ostrosłupa.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie analizują rozwiązania Przykładu 1, Przykładu 2 i Przykładu 3. Nauczyciel omawia ewentualne problemy uczniów.
2. Nauczyciel wyświetla Galerię zdjęć interaktywnych i omawia rozwiązane zadanie.
3. Uczniowie rozwiązują Polecenie 2, omawiają wyniki na forum klasy.
4. Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia interaktywne na czas (od ćwiczenia łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która rozwiąże poprawnie ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy, wątpliwości omawiane.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel przypomina uczniom cel lekcji i kryteria sukcesu. Pyta o stopień ich realizacji, używając techniki świateł drogowych.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te przykłady i ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Pole powierzchni ostrosłupa

Wskazówki metodyczne:

Przykład przedstawiony w galerii zdjęć interaktywnych można użyć do zadania o objętości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.