Jak wyznaczyć pochodną funkcji?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Jak wyznaczyć pochodną funkcji?

Źródło: Ignat Kushanrev, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Wyznaczanie pochodnych funkcji bezpośrednio z definicji bardzo często jest wymagające i czasochłonne. Z pomocą przychodzą wzory pochodnych funkcji elementarnych oraz arytmetyczne własności pojęcia pochodnej. W tym materiale stosować będziesz znane już własności pochodnej funkcji w praktyce, a zrealizowane zadania jeszcze bardziej przybliżą Cię do mistrzostwa w wyznaczaniu pochodnych przykładowych funkcji.

Twoje cele

- Zestawisz własności arytmetyczne pochodnej celem zastosowania ich w praktyce.
- Wyznaczysz pochodne wybranych funkcji, w szczególności zastosujesz wzory wyrażające pochodną iloczynu funkcji oraz ilorazu funkcji.

Przeczytaj

Na początek przypomnijmy wzory pochodnych wybranych funkcji elementarnych. Znasz już pochodną funkcji stałej oraz pochodną funkcji potęgowej o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Ponadprogramowo przedstawimy jeszcze wzory pochodnych wybranych funkcji trygonometrycznych oraz pochodną logarytmu naturalnego. Wzory wyrażające pochodne wymienionych wyżej funkcji prezentujemy w tabeli.

Wzór funkcji $y = f(x)$	Pochodna funkcji $y = f'(x)$	Uwagi
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$a \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^{\alpha}$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$	$x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

Korzystać także będziemy z własności arytmetycznych pochodnej, które przypominamy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie: Własności arytmetyczne pochodnej

Jeśli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, są różniczkowalne w zbiorze A, to istnieją również pochodne sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu tych funkcji oraz

- $(f + g)' = f' + g'$,
- $(f - g)' = f' - g'$,
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$, gdzie $k \in \mathbb{R}$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, przy czym $g \neq 0$.

Wykorzystując wymienione wyżej własności oraz pochodne wybranych funkcji elementarnych, w szeregu przykładów wyznaczymy pochodne wybranych funkcji.

Przykład 1

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = 2\sin x + 3\sqrt[3]{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Korzystając z wcześniejszego twierdzenia, wyznaczymy pochodną sumy funkcji:

$$h'(x) = \left(2\sin x + 3\sqrt[3]{x^2}\right)' = 2\cdot(\sin x)' + 3\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$= 2\cos x + 3\cdot\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2\cos x + \tfrac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Przykład 2

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = 5\ln x - 7\cos x$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z wzoru na pochodną różnicy funkcji. Wówczas

$$h'(x) = (5\ln x - 7\cos x)' = 5\cdot(\ln x)' - 7\cdot(\cos x)' == 5\cdot\tfrac{1}{x} - 7\cdot(-\sin x) = \tfrac{5}{x} + 7\sin x.$$

Przykład 3

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = 15\ln x\cdot\sqrt[5]{x^8}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Korzystając z wzoru wyrażającego pochodną iloczynu funkcji, otrzymamy:

$$h'(x) = \left(15\ln x\cdot\sqrt[5]{x^8}\right)' = (15\ln x)'\cdot\sqrt[5]{x^8} + 15\ln x\cdot\left(\sqrt[5]{x^8}\right)' =$$
$$= 15\cdot(\ln x)'\cdot\sqrt[5]{x^8} + 15\ln x\cdot\left(x^{\frac{8}{5}}\right)' =$$
$$= 15\cdot\tfrac{1}{x}\cdot\sqrt[5]{x^8} + 15\ln x\cdot\tfrac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} = 15x^{\frac{3}{5}} + 24\ln x\cdot x^{\frac{3}{5}} == \sqrt[5]{x^3}(15 + 24\ln x).$$

Przykład 4

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = \frac{3\sin x}{x^8}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Stosując wzór na pochodną ilorazu funkcji, dostaniemy

$$h'(x) = \left(\tfrac{3\sin x}{x^8}\right)' = 3\cdot\left(\tfrac{\sin x}{x^8}\right)' = 3\cdot\tfrac{(\sin x)'\cdot x^8 - \sin x\cdot(x^8)'}{(x^8)^2} =$$
$$= 3\cdot\tfrac{\cos x\cdot x^8 - \sin x\cdot 8x^7}{x^{16}} = \tfrac{3x^7(x\cos x - 8\sin x)}{x^{16}} = \tfrac{3(x\cos x - 8\sin x)}{x^9}.$$

Przykład 5

Wyznaczymy pochodną funkcji $h(x) = \frac{4x^5 + 5\cos x}{\sqrt[4]{x}}$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie

Wykorzystując powyższe własności pojęcia pochodnej, otrzymamy

$$h'(x) = \left(\frac{4x^5+5\cos x}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \frac{(4x^5+5\cos x)' \cdot \sqrt[4]{x} - (4x^5+5\cos x) \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)'}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2} =$$
$$= \frac{(20x^4-5\sin x)\sqrt[4]{x} - (4x^5+5\cos x) \cdot \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{20x^{\frac{17}{4}} - 5\sqrt[4]{x}\sin x - x^{\frac{17}{4}} - \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}}\cos x}{x^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{20\sqrt[4]{x^{17}} - 5\sqrt[4]{x}\sin x - \sqrt[4]{x^{17}} - \frac{5\cos x}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt[4]{x^3}\left(20\sqrt[4]{x^{17}} - 5\sqrt[4]{x}\sin x - \sqrt[4]{x^{17}}\right) - 5\cos x}{4\sqrt[4]{x^5}} = \frac{4\sqrt[4]{x^3}\left(19\sqrt[4]{x^{17}} - 5\sqrt[4]{x}\sin x\right) - 5\cos x}{4\sqrt[4]{x^5}}.$$

Słownik

funkcja różniczkowalna

funkcja posiadająca pochodną w dowolnym punkcie swojej dziedziny

suma funkcji $f+g$

funkcja $f+g: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

różnica funkcji $f-g$

funkcja $f-g: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

iloczyn funkcji $f \cdot g$

funkcja $f \cdot g: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

dla wszystkich $x \in A$

iloraz funkcji $\frac{f}{g}$

funkcja $\frac{f}{g}: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, zdefiniowana jako

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

dla wszystkich $x \in A$

pochodna sumy funkcji $f+g$

pochodna postaci

$$(f+g)' = f' + g'$$

pochodna różnicy funkcji $f - g$

pochodna postaci

$$(f-g)' = f' - g'$$

pochodna iloczynu funkcji $f \cdot g$

pochodna postaci

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

pochodna ilorazu funkcji $\frac{f}{g}$

pochodna postaci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2},$$

przy czym $g \neq 0$

logarytm naturalny

logarytm, którego podstawą jest liczba e. Wartość tej liczby można określić w przybliżeniu: $e \approx 2,718281828\ldots$ Jest ona granicą ciągu $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Wykorzystując poznane pochodne funkcji oraz własności arytmetyczne pochodnej, sprawdź się w poniższej grze.

Polecenie 2

Wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f\left(x\right) = 8\sqrt{x^5} \cdot x^2$,
- $g\left(x\right) = 4 \cdot \frac{x+2}{x-2}, x \neq 2$.

Polecenie 3

Wiedząc, iż $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ oraz $(\sin x)' = \cos x$, wyznacz pochodne następujących funkcji:

- $f\left(x\right) = x^8 \cdot \ln x, x > 0$;
- $g\left(x\right) = \frac{x^2}{\sin x}, x \neq k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Wyznacz pochodną funkcji $f\left(x\right) = \frac{8}{\sqrt{x^5}}, x \neq 0.$

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kruszelnicka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć pochodną funkcji?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- klasyfikuje własności arytmetyczne pojęcia pochodnej
- stosuje poznane wiadomości do wyznaczania pochodnych funkcji, w szczególności pochodnych iloczynu funkcji i ilorazu funkcji
- stosuje ponadprogramowe informacje, takie jak wzór na pochodną logarytmu naturalnego czy wzór na pochodne wybranych funkcji trygonometrycznych, celem wyznaczania pochodnych funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- papierowa wstęga
- sztafeta zadaniowa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- e-podręcznik
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda
- długie papierowe paski
- kolorowe kartki A4, długopisy

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj".
2. Pracując w parach, metodą papierowej wstęgi, uczniowie powtarzają wiadomości na temat pojęcia pochodnej funkcji (na przygotowanym uprzednio przez nauczyciela papierowym pasku na przemian zapisują poznane już własności pojęcia pochodnej, w szczególności własności arytmetyczne pochodnej oraz wzory pochodnych wybranych funkcji elementarnych, które zamieszczono w sekcji „Przeczytaj").
3. Po skończonej pracy uczniowie wymienią się wstęgami z sąsiadami z innej ławki. Odczytują zapisane na wstędze sąsiadów wiadomości, ewentualnie dopisują to, czego tam nie ma i wstęgę podają dalej. W ten sposób wszystkie pary uczniów przypomną sobie pożądane wiadomości.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna od rekapitulacji wiadomości zawartych w sekcji „Przeczytaj". Razem z uczniami omawia przykłady zawarte we wspomnianej sekcji.
2. Wybrane zadania z sekcji „Sprawdź się" rozwiązywane są metodą sztafety zadaniowej. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uprzednio przygotowane zadania dla grup nauczyciel przykleja na tablicy (każdej grupie przyporządkowana jest kartka w innym

kolorze). Jeden uczeń z każdej grupy podchodzi do tablicy i odrywa pierwsze zadanie. Uczniowie w grupach wspólnie pracują nad zadaniem, rozwiązanie zapisują na kartce. Kolejna osoba z każdej grupy przyczepia kartkę z rozwiązaniem na tablicy i pobiera kolejne zadanie. Nauczyciel systematycznie sprawdza kolejne przyczepione do tablicy rozwiązania zadań. Błędnie rozwiązane zadania wracają do poprawy do uczniów.
3. Po zakończonej sztafecie uczniowie omawiają swoje rozwiązania.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup dzielą się informacjami na temat pracy swojej grupy, prezentują pomysły, przedstawiają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par. Wyjaśnia wątpliwości.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się” oraz grają w grę edukacyjną. Ponadto grupy, które podczas lekcji nie rozwiązały poprawnie któregoś z ćwiczeń sekcji „Sprawdź się”, mają za zadanie ułożenie 2 zadań podobnego typu i zapisanie ich rozwiązań.

Materiały pomocnicze:

- Działania na pochodnych

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać grę edukacyjną do utrwalenia wiadomości z lekcji w ramach pracy domowej.