Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem "delty"

Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem "delty"

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już wzór na wyróżnik trójmianu kwadratowego. To bardzo ważne i powszechnie używane narzędzie pracy matematyków. Wiesz również, że znak wyróżnika mówi o liczbie rozwiązań równania kwadratowego.

W tym materiale będziemy rozpoznawać równania posiadające dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub równania sprzeczne oraz obliczać pierwiastki równania kwadratowego z wykorzystaniem „delty” i innych niezbędnych wzorów.

Twoje cele

- Rozpoznasz równania posiadające dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub równania sprzeczne.
- Rozwiążesz równania kwadratowe.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek, nazwany podwójnym pierwiastkiem $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie kwadratowe $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = \frac{3}{2}$.

Obliczymy Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-2)-1}{2\cdot\frac{1}{2}}$

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-(-2)+1}{2\cdot\frac{1}{2}}$

$x_2 = 3$

Rozwiązania równania to liczby $1, \quad 3$.

Przykład 2

Obliczymy pierwiastki równania $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ (o ile istnieją) z dokładnością do 0,01.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 5$, $b = -2\sqrt{5}$, $c = 1$.

Obliczymy Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = \left(-2\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20 - 20 = 0$

Ponieważ $\Delta = 0$ zatem równanie posiada jeden pierwiastek podwójny.

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

$x_0 = \frac{-\left(-2\sqrt{5}\right)}{2 \cdot 5}$

$x_0 = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45$

Równanie posiada jeden pierwiastek podwójny $x_0 \approx 0{,}45$.

Przykład 3

Obliczymy, jeżeli istnieją, pierwiastki równania $2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} = 0$.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$.

Obliczymy Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9 - 24 = -15$

Ponieważ $\Delta < 0$ zatem równanie nie posiada rzeczywistych pierwiastków.

Przykład 4

Obliczymy zbiór rozwiązań równania kwadratowego $(3x - 1)^2 = (x + 2)^2$.

Najpierw doprowadzimy równanie do najprostszej postaci. W tym celu zastosujemy wzory skróconego mnożenia.

$(3x - 1)^2 = (x + 2)^2$

$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 4x + 4$

$8x^2 - 10x - 3 = 0$

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 8$, $b = -10$, $c = -3$.

Obliczymy Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 100 + 96 = 196 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równania posiada dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-10)-14}{2 \cdot 8}$

$x_1 = \frac{-1}{4}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-(-10)+14}{2 \cdot 8}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$.

Przykład 5

Wyznaczymy współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji
$f(x) = x^2 + \left(3 - \sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2}$ z osią X układu współrzędnych.

Aby obliczyć punkty przecięcia wykresu funkcji z osią X należy obliczyć, dla jakich argumentów x, $f(x) = 0$.

$x^2 + \left(3 - \sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2} = 0$

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 1$, $b = \left(3 - \sqrt{2}\right)$, $c = -3\sqrt{2}$.

Obliczymy wyróżnik równania.

$\Delta = \left(3 - \sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-3\sqrt{2}\right) = 9 - 6\sqrt{2} + 2 + 12\sqrt{3} = 11 + 6\sqrt{2}$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3 + \sqrt{2}\right)^2} = \left|3 + \sqrt{2}\right| = 3 + \sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{2}-3-\sqrt{2}}{2 \cdot 1}$

$x_1 = -3$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{2\cdot 1}$

$x_2 = \sqrt{2}$

Czyli punkty przecięcia z osią X to $(-3,\ 0)$ i $\left(\sqrt{2},\ 0\right)$.

Słownik

równanie kwadratowe

równanie $ax^2 + bx + c = 0$ dla $a \neq 0$

pierwiastki równania

liczby spełniające równanie

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, w którym przedstawione są sposoby rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem „delty”.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D10eVbUMJ

Film nawiązujący do treści materiału. Korzystając ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, a także ze wzoru na deltę, czyli $\Delta = b^2 - 4ac$ rozwiążemy następujące równania kwadratowe: a) cztery X kwadrat odjąć dwanaście X dodać dziesięć równa się zero., B) Cztery X kwadrat odjąć dwanaście X dodać dziewięć równa się zero oraz C) cztery X kwadrat odjąć dwanaście X odjąć szesnaście równa się zero.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie. Zastosuj sposoby rozwiązania równania pokazane w filmie samouczku.

1. $x^2 + 2x - 15 = 0$,
2. $25x^2 + 20x + 4 = 0$,
3. $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem „delty”

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje równania posiadające dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub równanie sprzeczne
- rozwiązuje równania kwadratowe
- dobiera model do określonej sytuacji problemowej, wybierając najkorzystniejszy sposób rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadków
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami kwadratowymi (aby w dalszej części lekcji określić rodzaje równań ze względu na liczbę rozwiązań).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj".
2. Nauczyciel wyświetla film samouczek i czyta treść polecenia 1.
3. Uczniowie w parach analizują przykłady pokazujące sposoby rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem „delty".
4. Po omówieniu przykładów w parach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązania przykładów.
5. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania poleceń umieszczonych pod filmem.
7. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań kwadratowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, których nie rozwiązali na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Film może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązania własnych przykładów równań kwadratowych.