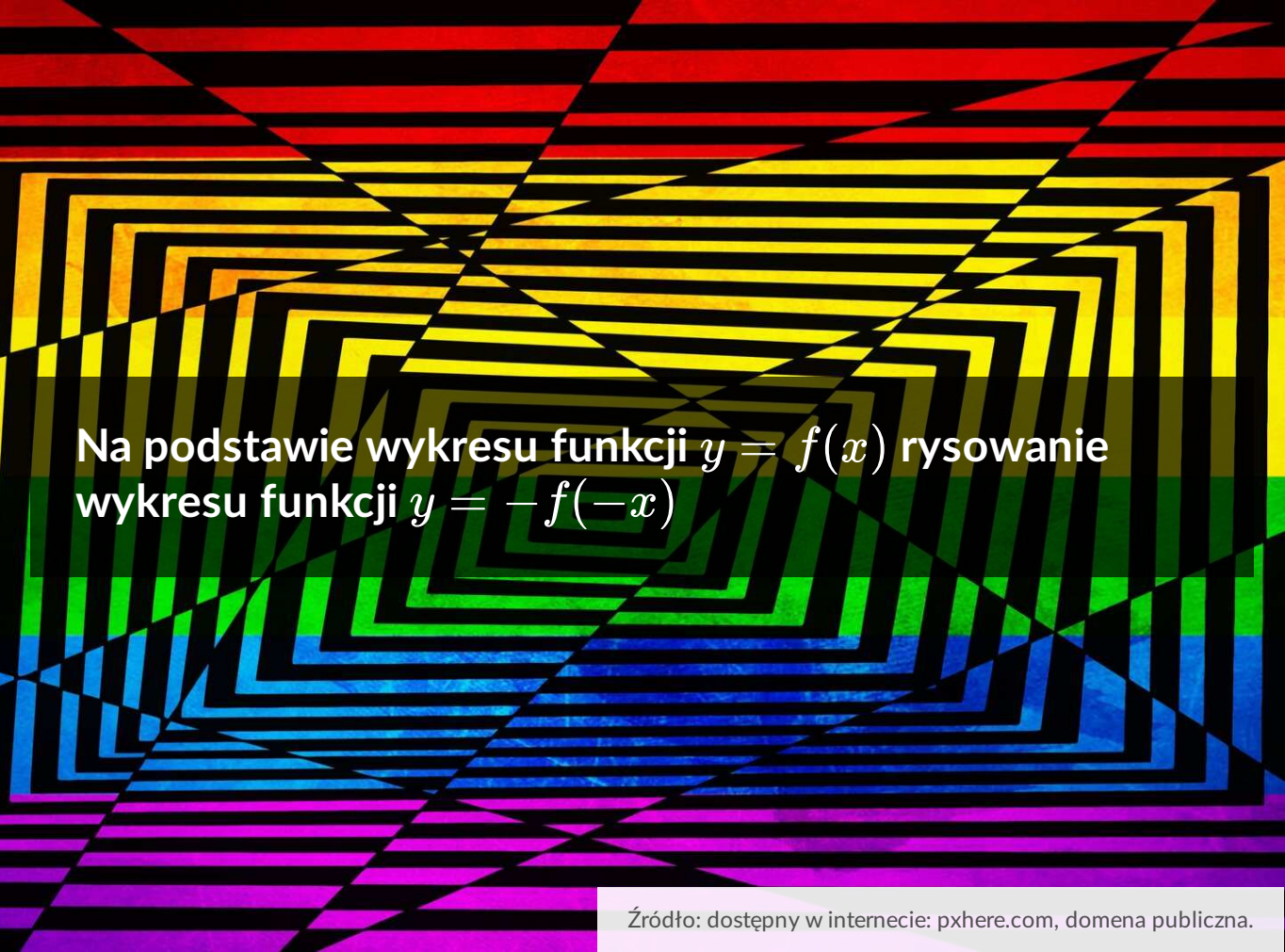




Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresu funkcji $y = -f(-x)$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresu funkcji $y = -f(-x)$

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W starożytności symetrią nazywano harmonijny układ części. Już w I w. p. n. e. rzymski architekt Witruwiusz, określał symetrię jako najbardziej podstawowe pojęcie estetyki i piękna.

Symetria jest wszechobecna: w świecie przyrody ożywionej, czy w matematyce. W tym materiale omówimy wiadomości dotyczące rysowania wykresu funkcji w symetrii względem osi X i Y układu współrzędnych. Sprawdzimy, które własności funkcji ulegają zmianie w wyniku takiego przekształcenia. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

Twoje cele

- Przekształcisz wykres danej funkcji w symetrii względem osi X i Y układu współrzędnych.
- Odczytasz własności funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu danej funkcji.
- Wyznaczysz wzór funkcji $-f(-x)$, znając wzór i wykres funkcji f .
- Zastosujesz swoją wiedzę, wykonując zestaw przygotowanych ćwiczeń.

Przeczytaj

Wykres funkcji możemy przekształcać w różny sposób. Na przykład wykorzystując przesunięcie równoległe, symetrię osiową lub środkową.

Twierdzenie: Symetria wykresu funkcji względem osi X i Y

Wykres funkcji $y = -f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi X i względem osi Y .

W praktyce takie przekształcenie oznacza to, że wykres funkcji f najpierw odbijamy symetrycznie względem osi X , a następnie tak otrzymany wykres odbijamy symetrycznie względem osi Y . Możemy też postąpić inaczej – najpierw wykres funkcji f odbijamy symetrycznie względem osi Y , a następnie otrzymany wykres odbijamy symetrycznie względem osi X .

Do prawidłowego wyznaczenia wykresu funkcji w symetrii względem osi X i względem osi Y wystarczy wykorzystać poniższą zależność.

Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi X i osi Y jest punkt $P' = (-x, -y)$.

Zauważmy, że przekształcenie to jest równoważne **symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych**.

Do naszkicowania wykresu funkcji $g(x) = -f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji $f(x)$ możemy wykorzystać poniższe własności.

1. Dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ jego obrazem w symetrii względem osi X układu współrzędnych jest punkt $P' = (x, -y)$.

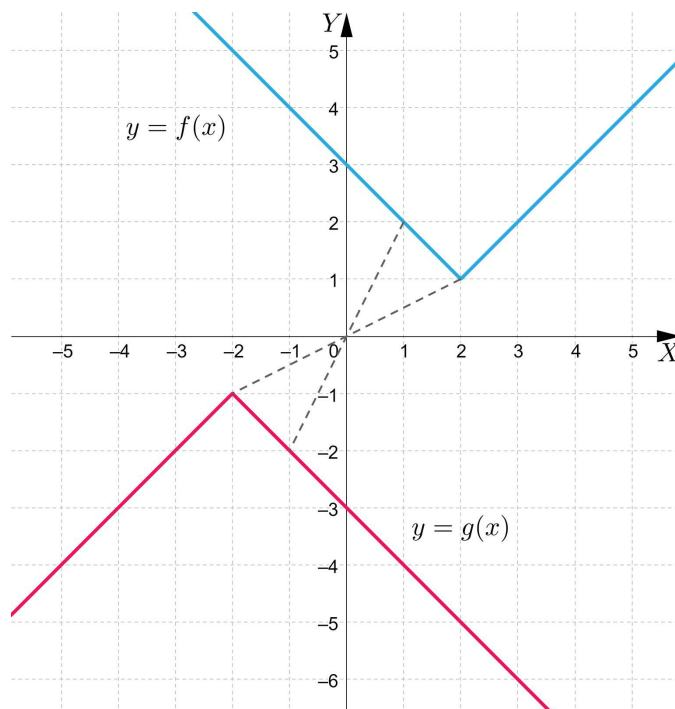
Jeżeli punkt $P' = (x, -y)$ należy do wykresu funkcji f , to $f(x) = -y$, czyli $y = -f(x)$.

2. Dla dowolnego punktu $P' = (x, -f(x))$ jego obrazem w symetrii względem osi Y układu współrzędnych jest punkt $P'' = (-x, -f(x))$.

Jeżeli punkt $P'' = (-x, -f(x))$ należy do wykresu funkcji g , to $g(-x) = -f(x)$.

3. Wobec tego prawdziwa jest zależność $g(-(-x)) = -f(-x)$, czyli $g(x) = -f(-x)$.

Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g , symetryczne względem początku układu współrzędnych (czyli względem osi X i Y):



W wyniku [przekształcaniu wykresu funkcji w symetrii względem początku układu współrzędnych](#), otrzymujemy wykres innej funkcji. Funkcje te mogą mieć inne dziedziny, zbiory wartości. Mogą zatem mieć różne własności.

Przykład 1

Wyznamy zbiór wartości funkcji $g(x) = -f(-x)$, jeżeli zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$. Dziedziną każdej z rozważanych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Zbiorem wartości funkcji $g(x) = -f(-x)$ jest zbiór liczb:

$$\{-5, -3, -1, 0, 1, 2\}.$$

Przykład 2

W tabeli przedstawiono argumenty oraz odpowiadające im wartości funkcji f .

Argumenty i wartości funkcji					
x	-3	-1	0	4	5
$f(x)$	2	4	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

Wyznamy tabelę argumentów oraz odpowiadających im wartości funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$.

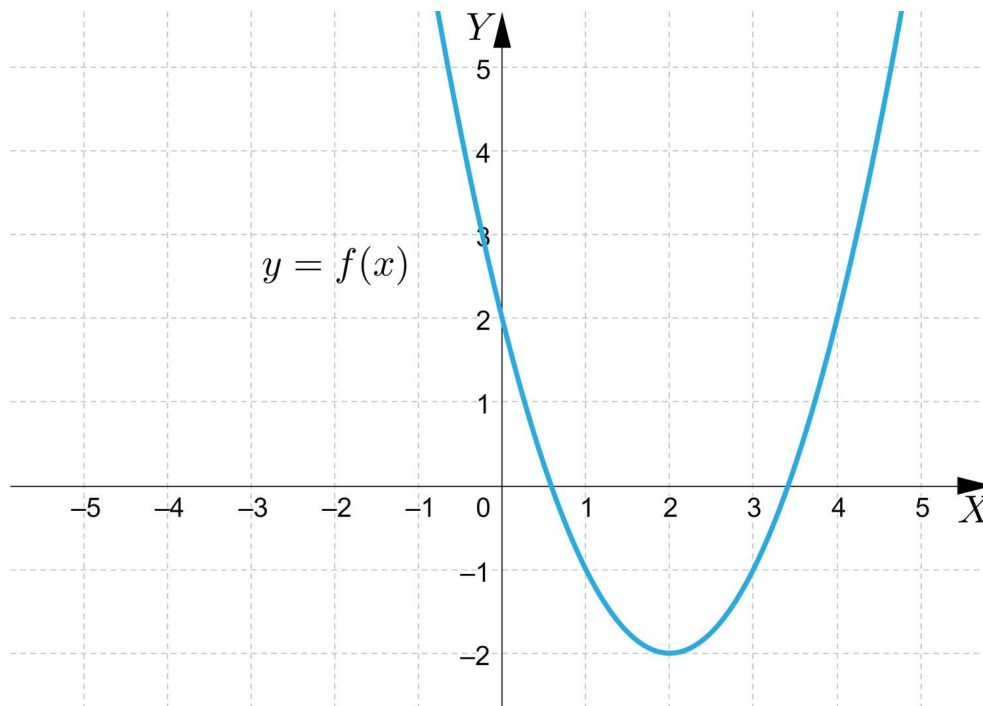
Rozwiązanie:

Jeżeli $g(x) = -f(-x)$, to:

Argumenty i wartości funkcji					
x	-5	-4	0	1	3
$g(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	-3	-4	-2

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



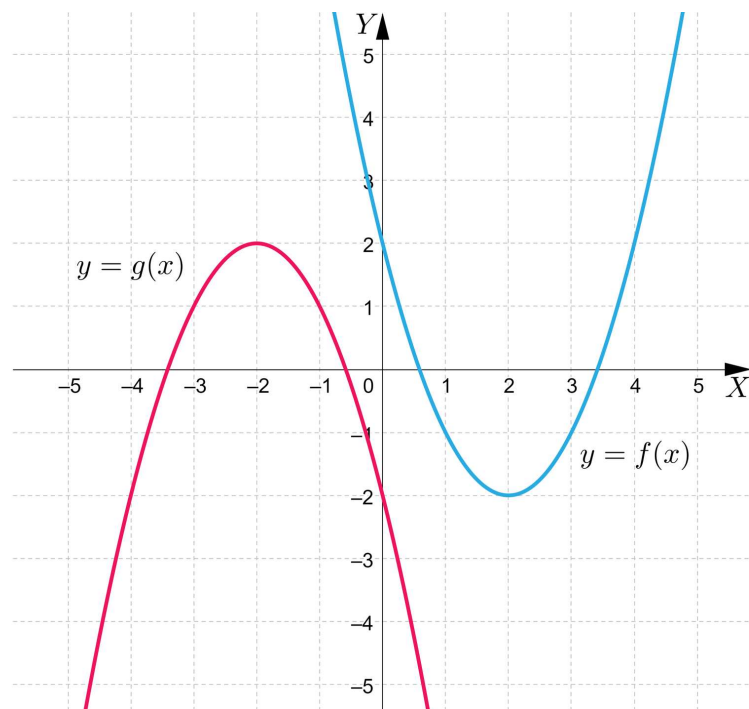
Naszkicujemy wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$, a następnie wyznaczymy:

- a) zbiór wartości funkcji g ,
- b) przedziały monotoniczności funkcji g .

Rozwiązanie:

Wykres funkcji g otrzymujemy, przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Wobec tego:



Z wykresu odczytujemy, że:

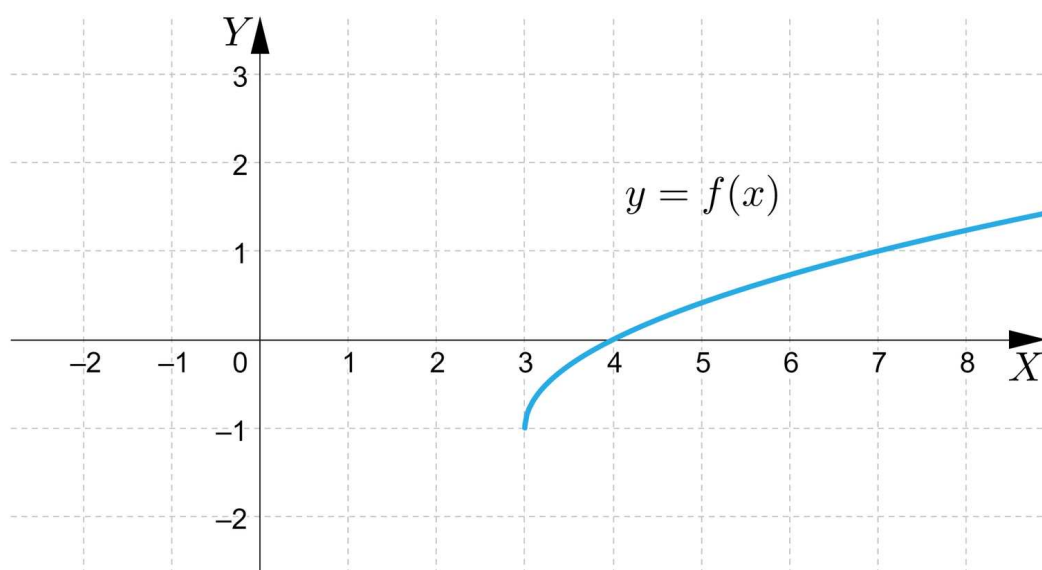
a) zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-\infty, 2\rangle$,

b) funkcja g jest:

- rosnąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$,
- malejąca w przedziale $\langle -2, \infty)$.

Przykład 4

Rysunek przedstawia wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$.



Niech $g(x) = -f(-x)$.

Dla funkcji g :

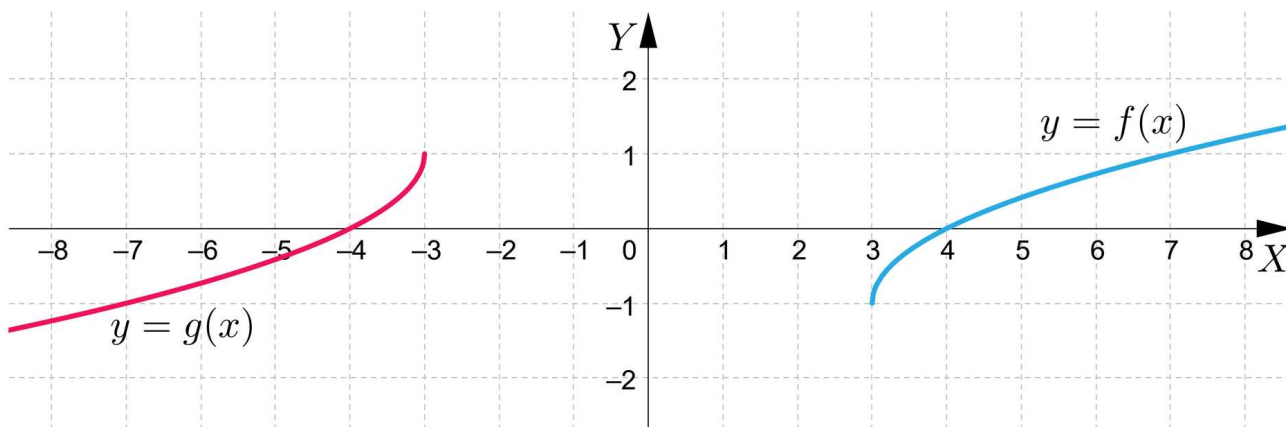
- a) wyznaczymy wzór funkcji,
- b) naszkicujemy wykres,
- c) określimy dziedzinę i zbiór wartości.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ $g(x) = -f(-x)$, zatem

$$g(x) = -f(-x) = -\sqrt{-x-3} + 1.$$

b) Wykres funkcji g przedstawia się następująco:



c) Dziedziną funkcji g jest przedział $(-\infty, -3\rangle$, a zbiorem wartości tej funkcji przedział $(-\infty, 1\rangle$.

Mając dany wzór funkcji $f(x)$, możemy wyznaczyć wzór funkcji $g(x) = -f(-x)$.

Przykład 5

Wyznamy wzór funkcji $g(x) = -f(-x)$, jeżeli funkcja f jest określona wzorem:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$,

b) $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $g(x) = -f(-x)$, to:

a) $g(x) = -f(-x) = -\left((-x)^2 - (-x) + 1\right) = -(x^2 + x + 1) = -x^2 - x - 1$,

b) $g(x) = -f(-x) = -\frac{-x+1}{3-(-x)} = \frac{x-1}{3+x}.$

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ oraz $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$

Przykład 6

Wykażemy, że jeśli funkcja f wyraża się wzorem $f(x) = ax$, gdzie $a, x \in \mathbb{R}$, to funkcja f i funkcja g określona wzorem $g(x) = -f(-x)$ są równe.

Rozwiązanie:

Mówimy, że funkcje f i g są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dziedziny oraz dla każdego $x \in D_f = D_g$ zachodzi warunek $f(x) = g(x).$

Niech $x \in D_f = D_g$. Wówczas:

$$g(x) = -f(-x) = -a \cdot (-x) = a \cdot x = ax = f(x)$$

Wobec tego funkcje f i g są równe.

Słownik

przekształcenie wykresu funkcji $-f(-x)$

- symetryczne odbicie wykresu funkcji przez symetrię względem osi X i osi Y ,
- symetryczne odbicie wykresu funkcji względem początku układu współrzędnych

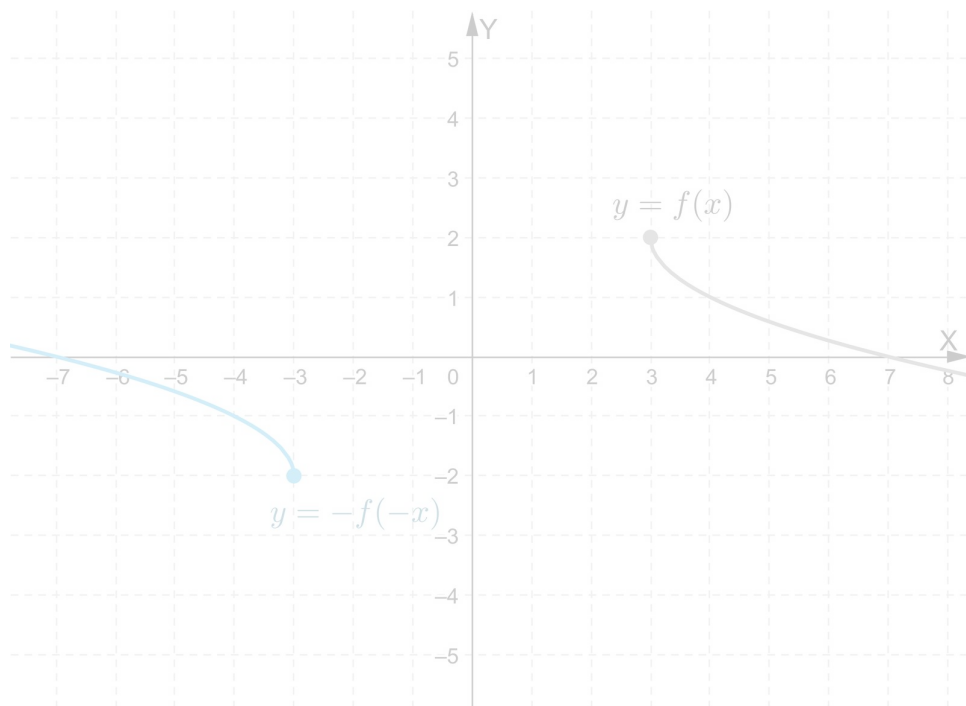
wykres funkcji f

zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , które spełniają zależność $y = f(x)$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

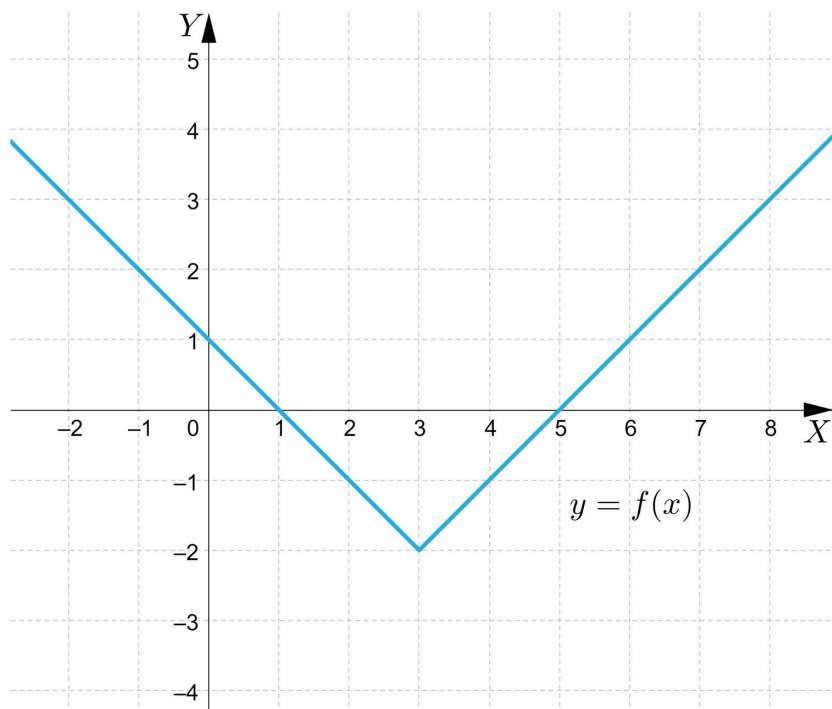
Przeanalizuj działanie symulacji interaktywnej. Za każdym razem określ dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji po przekształceniu. Następnie samodzielnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18AIREG4>

Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x - 3| - 2$.



Niech $g(x) = -f(-x)$.

a) Wyznacz wzór funkcji g .

b) Naszkicuj wykres funkcji g .

c) Określ przedziały monotoniczności funkcji g .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Przekształcenie wykresu funkcji $-f(-x)$ oznacza:



Odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi rzędnych układu współrzędnych.



Odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem początku układu współrzędnych.

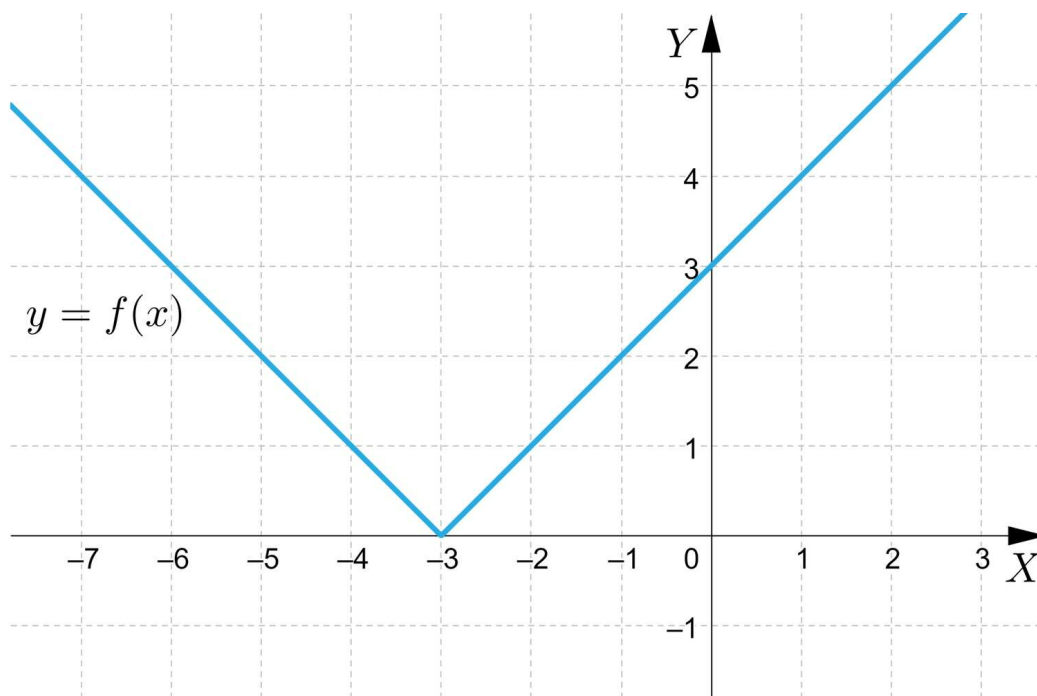


Odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi odciętych układu współrzędnych.

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |x + 3|$. Zaznacz zdania, które są prawdziwe.



☐ Funkcja określona wzorem $g(x) = -f(-x)$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 3)$.

☐ Punkt przecięcia wykresu funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$ z osią rzędnych ma współrzędne $(0, 3)$.

☐ Zbiorem wartości funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$ jest przedział $(-\infty, 0)$.

☐ Miejscem zerowym funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$ jest (-3) .

Ćwiczenie 3



Połącz w pary zbiór, który jest dziedziną funkcji f , z dziedziną funkcji $g(x) = -f(-x)$:

$\langle -4, 3 \rangle$

$\langle 3, 4 \rangle$

$\langle 3, 4 \rangle$

$\langle -3, 4 \rangle$

$\langle -3, 4 \rangle$

$\langle -4, 3 \rangle$

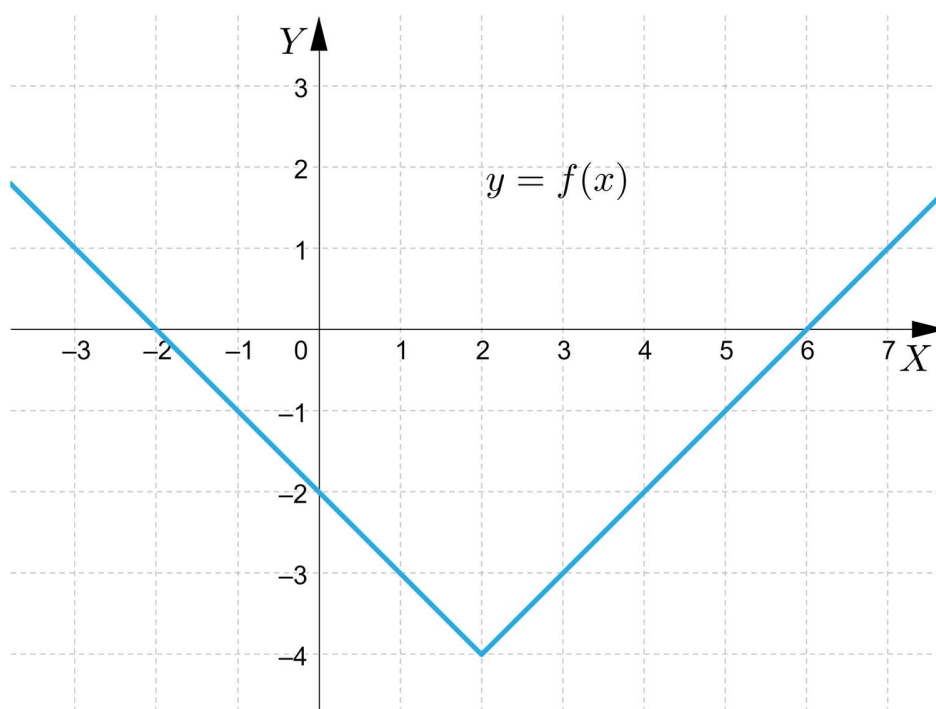
$\langle -4, -3 \rangle$

$\langle -4, -3 \rangle$

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami, wpisując właściwe odpowiedzi w luki w tekście.

Jeżeli $g(x) = -f(-x)$, to:

- miejscami zerowymi funkcji są liczby oraz ,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, \text{})$,
- dla argumentu 0 funkcja przyjmuje wartość ,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(\text{}, \infty)$.

Ćwiczenie 5



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Jeżeli $g(x) = -f(-x)$ oraz $f(x) = x^2 + 2$, to:

funkcja g jest rosnąca
w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$

funkcja g jest malejąca
w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$

Jeżeli $g(x) = -f(-x)$ oraz $f(x) = -x^2 + 2$, to:

funkcja g przyjmuje wartości nie
mniejsze niż (-2)

funkcja g przyjmuje tylko
wartości ujemne

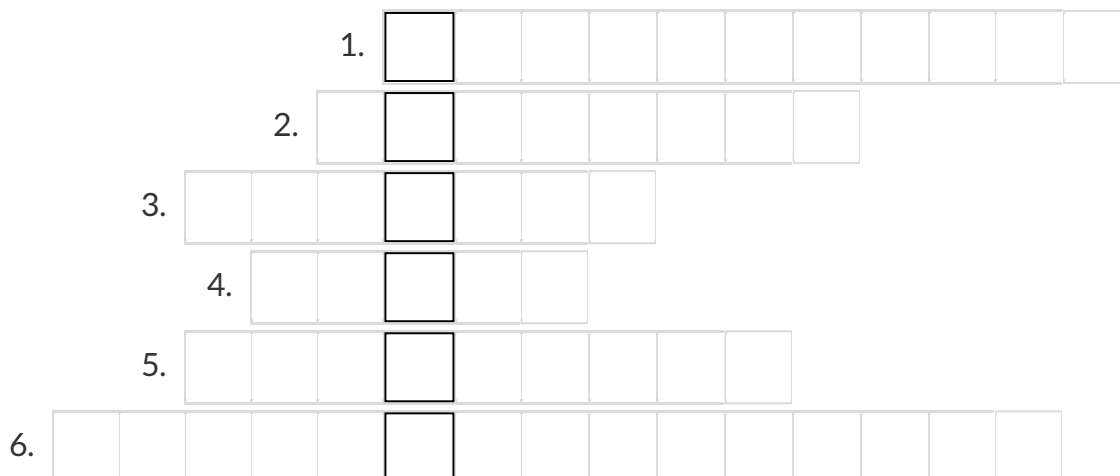
$$g(x) = -x^2 - 2$$

$$g(x) = x^2 - 2$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż krzyżówkę.



1. Liczby określające punkt w układzie współrzędnych.
2. Przekształcenie figury np. względem osi układu współrzędnych.
3. Przyporządkowanie, które każdemu elementowi z jednego zbioru przypisuje dokładnie jeden element z drugiego zbioru.
4. Otrzymujemy go w wyniku przekształcenia wykresu funkcji lub figury geometrycznej.
5. Może zmienić się dla funkcji, gdy wykonamy przekształcenie wykresu $g(x) = -f(-x)$.
6. Jest nim symetria lub odbicie wykresu funkcji.

Ćwiczenie 7



Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych $(-3, 2)$, $(-2, 4)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$, $(1, -2)$.

Wyznacz:

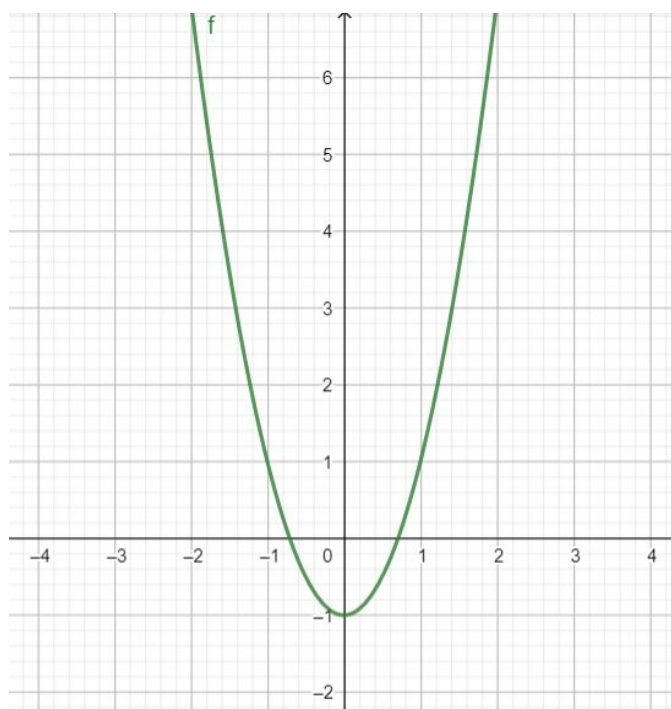
a) współrzędne punktów, które należą do wykresu funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$,

b) dla jakich argumentów funkcja określona wzorem $g(x) = -f(-x)$ przyjmuje wartości dodatnie.

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 1$.



Niech $g(x) = -f(-x)$.

a) Wyznacz wzór funkcji g .

b) Naskicuj wykres funkcji g .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresu funkcji $y = -f(-x)$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- szkicuje wykresy różnych funkcji w symetrii względem osi X i Y układu współrzędnych,
- wyznacza wzór funkcji, której wykres otrzymano po przekształceniu wykresu danej funkcji w symetrii względem początku układu współrzędnych,
- odczytuje własności funkcji z wykresu po jego przekształceniu w symetrii względem osi odciętych i rzędnych układu współrzędnych,
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- metoda krokodyla;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysowanie wykresu funkcji $y = -f(-x)$ ”, nawiązuje do wiedzy uczniów z poprzednich lekcji. Przedstawia cel oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Symulacja interaktywna”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują indywidualnie ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5 w sekcji „Sprawdź się”; po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki”

i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria wykresu funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Symulacja interaktywna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące przekształcania wykresów funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych.
- „Symulację interaktywną” można wykorzystać w realizacji lekcji dotyczącej odczytywania własności funkcji z wykresu.