



Pojęcie równania kwadratowego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Aby opisać zjawiska generujące dzisiejszy świat, wygodnie jest dysponować narzędziami, które ułatwiają te opisy. Do nich niewątpliwie należą równania. Dzięki nim możemy obliczyć na przykład, na jakiej wysokości od ziemi będzie piłka po 2 sekundach spadania z okna, które jest na wysokości 80 m od ziemi.

Dzięki równaniom kwadratowym możemy również rozwiązywać problemy teoretyczne. Czy wiadomo, ile jest liczb, których kwadrat jest równy 121? Czy istnieje liczba, której kwadrat jest równy -16 ?

Odpowiedzi na te i inne pytania znajdziesz w materiałach dotyczących pojęcia równania kwadratowego i metod jego rozwiązania.

Twoje cele

- Określisz rodzaj równania ze względu na liczbę niewiadomych i stopień równania.
- Rozpoznasz równanie drugiego stopnia z jedną niewiadomą.
- Odróżnisz równania kwadratowe zupełne od niezupełnych.
- Opisziesz za pomocą równania kwadratowego sytuację przedstawioną słownie.

Przeczytaj

Przykład 1

W prostokącie o polu równym 143 jeden bok jest o 2 dłuższy od drugiego boku. Zapiszemy zależność, która pozwoli obliczyć długości boków tego prostokąta.

Oznaczymy:

x – długość krótszego boku prostokąta.

Wtedy $x + 2$ będzie długością dłuższego boku tego prostokąta.

Pole prostokąta możemy zapisać jako iloczyn $x(x + 2)$.

Wiemy też, że pole prostokąta jest równe 143.

Możemy zatem zapisać $x(x + 2) = 143$.

W ten sposób zapisaliśmy równanie ze zmienną x .

Przykład 2

Dany jest trójkąt prostokątny o polu równym 144. Przyprostokątne tego trójkąta różnią się o 5.

Zapiszemy równanie, na podstawie którego można obliczyć długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.

Niech:

x – długość krótszej przyprostokątnej,

$x + 5$ – długość dłuższej przyprostokątnej.

Zatem możemy zapisać równanie opisujące pole trójkąta. Równanie pozwoli na obliczenie długości krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.

$$\frac{1}{2}x(x + 5) = 144$$

Przykład 3

Suma cyfr szukanej liczby dwucyfrowej jest równa 7. Jeżeli tę szukaną liczbę pomnożymy przez liczbę, która powstała przez zamianę cyfry jednośc i dziesiątek szukanej liczby, to otrzymamy 1462.

Zapiszemy równanie, które pozwoli obliczyć cyfrę dziesiątek i cyfrę jednośc szukanej liczby.

Niech:

x – oznacza cyfrę jedności szukanej liczby dwucyfrowej (cyfra ta musi być mniejsza od liczby siedem, ale większa od zera),

$7 - x$ – oznacza cyfrę dziesiątek szukanej liczby dwucyfrowej.

Szukaną liczbę możemy zapisać jako $(7 - x) \cdot 10 + x$.

Liczba, która powstała przez zamianę cyfry dziesiątek i jedności szukanej liczby to:

$$10x + (7 - x)$$

Iloczyn tych liczb to:

$$[(7 - x) \cdot 10 + x] \cdot [10x + (7 - x)]$$

Zatem równanie ma postać

$$[(7 - x) \cdot 10 + x] \cdot [10x + (7 - x)] = 1462$$

W powyższych przykładach pokazaliśmy, jak analizując treść zadania doprowadzić do zapisania szukanej zależności za pomocą równania kwadratowego. Jest to często najtrudniejszy element analizy zadania.

Definicja: Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą – jest to równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a , b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Postać $ax^2 + bx + c = 0$ gdy $a \neq 0$ nazywamy **postacią ogólną równania kwadratowego**.

Równania, w których wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi zupełnymi**.

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Przykład 4

Sprawdźmy, czy równanie $x \cdot (x + 4) = 2 \cdot (1 + 2x)$, po zapisaniu w najprostszej postaci, będzie równaniem kwadratowym niezupełnym.

Przekształćmy równoważnie równanie.

$$x \cdot (x + 4) = 2 \cdot (1 + 2x)$$

$$x^2 + 4x = 2 + 4x$$

$$x^2 = 2$$

$$x^2 - 2 = 0$$

Zatem otrzymaliśmy **równanie kwadratowe z jedną niewiadomą**, w którym $b = 0$, postaci $ax^2 + c = 0$.

Jest to równanie kwadratowe niezupełne.

Przykład 5

Sprawdzimy, czy równanie $(2x + 1)^2 = 2x^2 + 3x + 1$, po sprowadzeniu do postaci ogólnej, będzie równaniem kwadratowym niezupełnym.

Przekształcimy równoważnie równanie.

$$(2x + 1)^2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$2x^2 + x = 0$$

Zatem otrzymaliśmy równanie kwadratowe, w którym $c = 0$, postaci $ax^2 + bx = 0$ gdzie $a, b \neq 0$.

Jest to równanie kwadratowe niezupełne.

Słownik

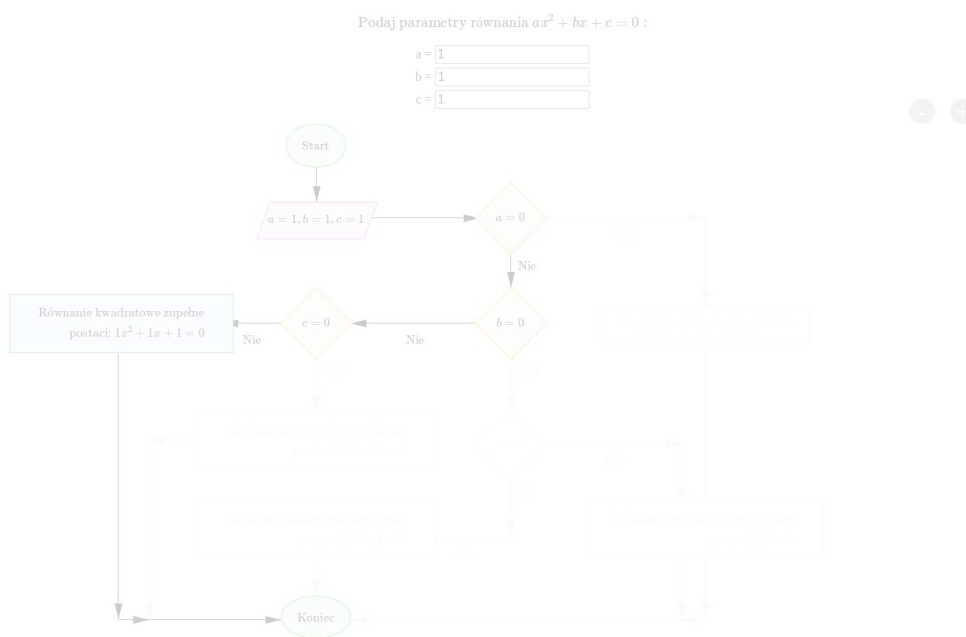
równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Poniżej zamieszczony jest schemat interaktywny przedstawiający klasyfikację równań kwadratowych na równania kwadratowe zupełne i niezupełne (uwzględniamy przypadki, gdy tylko jeden ze współczynników b lub c będzie zerem).






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D28Xtj2CI>

Polecenie 2

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm przedstawiający klasyfikację równań kwadratowych postaci $ax^2 + bx + c = 0$ na równania kwadratowe zupełne i niezupełne.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wybierz równania kwadratowe z jedną niewiadomą. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

- $x^2 + 2x^2 - 3x^2$
- $\sqrt{5}s^2 = 1$
- $t^2 = t$
- $4a^2 + 3a - 5 = 4$
- $\frac{2y^2 - y}{7} = 3$
- $(2z - 1)(3 - t) = 1$
- $(2z - 1)(3 - z^2) = 1$
- $\frac{2y^2 - y}{7y} = 3$
- $4z^2 = z^3 - 6z$

Ćwiczenie 2



„Przeciągnij” równanie do odpowiedniego okienka.

`<math><msup><mi>t</mi><mn>2</mn></msup><mo>=</mo><mn>0</mn></math>`, `<math><mn>2</mn><msup><mi>a</mi><mn>2</mn></msup><mo>-</mo><mn>5</mn><mi>a</mi><mi>b</mi><mo>=</mo><mn>0</mn></math>`, `<math><mn>5</mn><mroot><mn>2</mn><mn>3</mn></mroot><mi>x</mi><mo>+</mo><mn>3</mn><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>=</mo><mn>2</mn></math>`, `<math><msup><mi>t</mi><mn>2</mn></msup><mo>=</mo><mi>a</mi><mi>t</mi></math>`, `<math><mroot><mn>4</mn><mn>3</mn></mroot><mi>x</mi><mi>y</mi><mo>+</mo><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>=</mo><mn>0</mn></math>`, `<math><msup><mi>t</mi><mn>2</mn></msup><mo>=</mo><mi>t</mi></math>`

Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą:	
Równanie kwadratowe z więcej niż jedną niewiadomą:	

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Kwadrat liczby x jest 16 razy większy od liczby $(x - 4)$.

Uzupełnij równanie, opisujące tę sytuację, odpowiednimi liczbami.

16, 64, 32, 1, -1 , -16

$$x^2 - \boxed{} \cdot x + \boxed{} = 0$$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi niepodzielnymi przez 4.

Suma kwadratów tych liczb jest równa 302. Zapisz równanie opisujące sytuację przedstawioną w zadaniu. Przedstaw równanie w postaci $ax^2 + bx + c = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pojęcie równania kwadratowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa rodzaj równania ze względu na liczbę niewiadomych i stopień równania
- rozpoznaje równanie drugiego stopnia z jedną niewiadomą
- odróżnia równania kwadratowe zupełne od niezupełnych
- opisuje za pomocą równania kwadratowego sytuację przedstawioną słownie
- tworzy procedury budowy równania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych zależności dających się zapisać w postaci równania kwadratowego.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych równań. Następnie stara się podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje równań ze względu na liczbę niewiadomych i stopień równania, podział na równania zupełne i niezupełne.
3. Uczniowie oglądają schemat interaktywny i omawiają go wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju równania ze względu na liczbę niewiadomych, stopień równania, podział na równania zupełne i niezupełne.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystane przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli prezentującej rodzaje równań kwadratowych.