



Kombinatoryka w stereometrii

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kombinatoryka w stereometrii

Źródło: green chameleon, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, licencja: CC BY 3.0.

W tym materiale pokażemy, jak budować modele kombinatoryczne w zadaniach dotyczących zależności między obiektami geometrycznymi w przestrzeni trójwymiarowej.

Zaprezentujemy związki ilościowe przede wszystkim w odniesieniu do liczby wierzchołków, ścian i krawędzi w wielościanach.

Będziemy zajmować się graniastosłupami i ostrosłupami, ale także wielościanami foremnymi (nazywanymi również bryłami platońskimi).

Udowodnimy również wzór (zwany wzorem Eulera dla wielościanów), który opisuje zależność między liczbami: ścian, wierzchołków oraz krawędzi dowolnego wielościanu wypukłego.

Twoje cele

- Obliczysz liczbę wierzchołków, ścian i krawędzi w graniastosłupach oraz ostrosłupach.
- Określisz zależności między liczbą wierzchołków, liczbą ścian oraz liczbą krawędzi w wielościanach foremnym.
- Znajomość poznanych wcześniej reguł kombinatorycznych oraz metody zliczania na dwa sposoby elementów tego samego zbioru pozwoli Ci obliczać, liczbę

wierzchołków, liczbę ścian oraz liczbę krawędzi w wielościanach spełniających określone warunki.

- Wykorzystasz wzór Eulera w zadaniach dotyczących wielościanów wypukłych.

Przeczytaj

Omawianie przykładów, dotyczących zależności ilościowych w wielościanach, zaczniemy od zadania, którego celem jest ustalenie liczby trójkątów prostokątnych, mających wierzchołki w wierzchołkach graniastosłupa prostego.

Dla ograniczenia liczby rozpatrywanych przypadków istotne będzie zastosowanie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych.

Przykład 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny, którego wszystkie krawędzie są równe 1. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty, których bokami są odcinki łączące wybrane 3 wierzchołki danego graniastosłupa. Obliczymy, ile jest wśród nich trójkątów prostokątnych.

Rozwiązanie

Ponieważ graniastosłup prawidłowy pięciokątny ma $5 \cdot 2 = 10$ wierzchołków, więc wszystkich trójkątów, których boki łączą 3 wierzchołki wybrane spośród tych 10 jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 10-elementowego. Liczba tych kombinacji jest równa $\binom{10}{3} = 120$, zatem tyle jest ogółem omawianych trójkątów.

Najpierw zajmiemy się trójkątami, których boki to odcinki łączące 3 wierzchołki należące do jednej z podstaw graniastosłupa.

Zauważmy, że w każdym pięciokącie foremnym wszystkie przekątne są tej samej długości (oznaczymy przez d długość takiej przekątnej w pięciokącie foremnym o boku 1). Oznacza to, że jeżeli wybierzemy 3 wierzchołki należące do jednej z podstaw rozpatrywanego graniastosłupa, to otrzymamy trójkąt równoramienny jednego z dwóch typów:

(1) o podstawie d i ramionach równych 1; w takim trójkącie kąty przy podstawie są równe 36° , a kąt między ramionami ma miarę 108° – żaden z tych trójkątów nie jest więc prostokątny; zauważmy też, że taki trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony przez przekątną d pięciokąta foremnego, zatem jest 5 różnych trójkątów tego typu,

(2) o podstawie 1 i ramionach równych d ; w takim trójkącie kąty przy podstawie są równe 72° , a kąt między ramionami ma miarę 36° – żaden z nich nie jest więc prostokątny; zauważmy też, że taki trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony przez bok pięciokąta foremnego, zatem jest 5 różnych trójkątów tego typu.

Ponieważ w każdej z dwóch podstaw rozpatrywanego graniastosłupa jest 5 trójkątów każdego z omówionych dwóch typów, więc korzystając z reguły mnożenia oraz z reguły dodawania obliczamy, że ogółem jest $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$ nieprostokątnych trójkątów

równoramiennych, których bokami są odcinki łączące trzy wierzchołki należące do jednej z podstaw graniastosłupa.

Następnie rozpatrujemy takie trójkąty, których dokładnie 2 wierzchołki leżą w płaszczyźnie jednej z podstaw danego graniastosłupa.

Najpierw zajmujemy się takimi trójkątami spośród nich, których jednym z boków jest krawędź boczna graniastosłupa.

Ponieważ dany graniastosłup jest prawidłowy, więc każda z jego 5 krawędzi bocznych jest prostopadła do obu płaszczyzn podstaw graniastosłupa.

Wynika stąd, że każdy z takich trójkątów jest prostokątny, a ponieważ do każdego z dwóch końców wybranej krawędzi bocznej wybierzemy trzeci wierzchołek trójkąta dowolnie spośród 8 pozostałych, więc ogółem jest $5 \cdot 8 = 40$ takich trójkątów.

Pozostało nam do rozpatrzenia $120 - (40 + 20) = 60$ trójkątów.

Weźmy przykładowy spośród nich i oznaczmy przez A oraz B dwa wierzchołki, które leżą w tej samej podstawie graniastosłupa, przez C – trzeci wierzchołek. Zgodnie z założeniem, żaden z odcinków AC , BC nie jest krawędzią boczną danego graniastosłupa.

Rozpatrzmy krawędź boczną, której jednym z końców jest wierzchołek C i oznaczmy jej drugi koniec przez D – wtedy punkt D razem z punktami A , B leży w tej samej podstawie graniastosłupa.

Ponieważ możliwe wartości miar kątów DBA oraz DAB to (jak pokazaliśmy wcześniej) 36° , 72° , 108° , więc na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wnioskujemy, że żaden z kątów CBA , CAB nie jest prosty, zatem wśród tych 60 trójkątów nie ma już prostokątnych.

Wynika stąd, że wśród rozpatrywanych jest dokładnie 40 trójkątów prostokątnych.

W kolejnych przykładach omówimy zależności między liczbą ścian, wierzchołków i krawędzi w wielościanach (przy czym z zasady będziemy zajmować się wielościanami wypukłymi).

Zaczynamy od problemów odwołujących się do liczby ścian, wierzchołków, krawędzi w graniastosłupach.

Rozpatrzmy więc graniastosłup (niekoniecznie prosty), którego obie podstawy to dwa przystające n -kąty wypukłe.

Wówczas:

- wszystkie wierzchołki graniastosłupa znajdują się w jego podstawach, a ponieważ w każdej z nich jest ich n , więc ogółem w rozważanym graniastosłupie otrzymujemy $2n$

wierzchołków;

- odpowiadające sobie krawędzie obu podstaw są przeciwległymi bokami ściany bocznej, stąd ścian bocznych jest tyle, ile jest krawędzi w podstawie, czyli n . Zatem wraz z dwiema podstawami dostajemy liczbę wszystkich ścian w graniastosłupie, która jest równa $n + 2$;
- łącząc w obu podstawach odpowiadające sobie pary wierzchołków otrzymamy krawędź boczną, stąd krawędzi bocznych jest tyle, ile jest wierzchołków w podstawie graniastosłupa, czyli n . Doliczając krawędzie obu podstaw (w każdej jest ich n) otrzymujemy łączną liczbę krawędzi graniastosłupa, równą $3n$.

Twierdzenie: o liczbie wierzchołków, ścian oraz krawędzi w graniastosłupie

Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawą jest n -kąć wypukły. Wówczas liczby: w – jego wierzchołków, s – jego ścian oraz k – jego krawędzi są równe $w = 2n$, $s = n + 2$, $k = 3n$.

Przykład 2

a) Łączna liczba wierzchołków i krawędzi pewnego graniastosłupa jest równa 80. Obliczmy, ile ścian ma ten graniastosłup.

Rozwiązanie

Korzystając z ustaleń podanych w powyższym twierdzeniu zapisujemy zależność: $w + k = 80$, skąd $2n + 3n = 80$, $5n = 80$, czyli $n = 16$. Oznacza to, że liczba ścian tego graniastosłupa jest równa $s = n + 2 = 18$.

Zauważmy przy okazji, że w graniastosłupie suma liczby wierzchołków i krawędzi jest podzielna przez 5 ($w + k = 2n + 3n = 5n$), co oznacza, że nie istnieje graniastosłup, w którym suma liczby krawędzi i liczby wierzchołków jest np. równa 777.

b) W pewnym graniastosłupie jest o 36 więcej krawędzi niż ścian. Obliczmy, ile wierzchołków ma ten wielościan.

Rozwiązanie

Ponownie korzystając z ustaleń podanych w powyższym twierdzeniu zapisujemy zależność:

$k = s + 36$, skąd $3n = n + 2 + 36$, czyli $2n = 38$. Oznacza to, że liczba wierzchołków tego graniastosłupa jest równa $w = 2n = 38$.

Zauważmy, że w dowolnym graniastosłupie różnica między liczbą krawędzi i liczbą ścian jest o 2 mniejsza od liczby wierzchołków ($k - s = 2n - 2 = w - 2$).

c) W pewnym graniastosłupie liczby: krawędzi (k), wierzchołków (w) oraz ścian (s) spełniają warunki $w + 10 < k < s + 30$. Obliczmy, ile krawędzi ma ten graniastosłup.

Rozwiązanie

Kolejny raz korzystamy z ustaleń zapisanych w powyższym twierdzeniu. Otrzymujemy układ nierówności:

$$2n + 10 < 3n < n + 2 + 30.$$

Stąd $n > 10$ i $2n < 32$, a więc $10 < n < 16$, czyli $n \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$.

Oznacza to, że jest 5 możliwych wartości liczby krawędzi: $k = 3n \in \{33, 36, 39, 42, 45\}$.

W drugiej kolejności zajmiemy się zależnościami między liczbą ścian, wierzchołków oraz krawędzi w ostrosłupach.

Rozpatrzmy zatem ostrosłup, którego podstawą jest n -kąt wypukły.

Wtedy:

- jest jeden wierzchołek który leży poza podstawą ostrosłupa, zatem ogólna liczba wierzchołków w rozważanym ostrosłupie jest równa $n + 1$,
- każda z krawędzi podstawy ostrosłupa jest jednym z boków trójkątnej ściany bocznej, której trzecim wierzchołkiem jest wierzchołek ostrosłupa leżący poza podstawą. Zatem ścian bocznych jest tyle, ile jest krawędzi w podstawie, czyli n , co wraz z podstawą daje liczbę wszystkich ścian w ostrosłupie, która jest równa $n + 1$.
- łącząc każdy z wierzchołków podstawy ostrosłupa z wierzchołkiem leżącym poza podstawą otrzymamy krawędź boczną. Wynika stąd, że krawędzi bocznych jest tyle, ile jest wierzchołków w podstawie graniastosłupa, czyli n , co wraz z krawędziami podstawy (jest ich również n) daje łączną liczbę krawędzi ostrosłupa, równą $2n$.

Twierdzenie: o liczbie wierzchołków, ścian oraz krawędzi w ostrosłupie

Rozpatrzmy ostrosłup, którego podstawą jest n -kąt wypukły. Wówczas liczby:

w – jego wierzchołków, s – jego ścian oraz k – jego krawędzi są równe

$$w = n + 1, s = n + 1, k = 2n.$$

Przykład 3

a) W pewnym ostrosłupie wierzchołków jest o 44 mniej niż krawędzi. Obliczmy, ile ścian ma ten ostrosłup.

Rozwiązanie

Korzystając z ustaleń podanych w powyższym twierdzeniu zapisujemy zależność:

$$w + 44 = k, \text{ skąd } n + 1 + 44 = 2n, \text{ czyli } n = 45.$$

Oznacza to, że liczba ścian tego ostrosłupa jest równa $s = n + 1 = 46$.

Zauważmy, że w dowolnym ostrosłupie różnica między liczbą krawędzi i liczbą wierzchołków jest o 2 mniejsza od liczby krawędzi ($k - w = n - 1 = s - 2$).

b) Łączna liczba ścian, wierzchołków i krawędzi pewnego ostrosłupa jest liczbą trzycyfrową mniejszą od 105. Obliczymy, ile krawędzi bocznych ma ten wielościan.

Rozwiązanie

Korzystamy z ustaleń podanych w twierdzeniu. Otrzymujemy stąd układ nierówności

$$99 < s + w + k < 105, \text{ skąd } 99 < n + 1 + n + 1 + 2n < 105,$$

$$99 < 4n + 2 < 105,$$

$$97 < 4n < 103,$$

$$\text{czyli } n \in \left(24\frac{1}{4}, 25\frac{3}{4}\right).$$

Oznacza to, że $n = 25$, czyli jest tylko jeden ostrosłup spełniający warunki zadania, w którym liczba krawędzi bocznych jest równa 25.

W kolejnych przykładach zajmować się będziemy własnościami wielościanów wypukłych, innych niż graniastosłupy oraz ostrosłupy.

Pozostajemy przy standardowych oznaczeniach:

w to liczba wierzchołków wielościanu,

s – liczba jego ścian,

k – liczba jego krawędzi.

Ponumerujemy też ściany wielościanu od 1 do s oraz oznaczmy liczbę boków w ścianie i przez n_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, s$.

Wykażemy, że w dowolnym wielościanie wypukłym między liczbą wierzchołków w , ścian s oraz krawędzi k zachodzą następujące zależności:

- (1) $2k \geq 3s$
- (2) $2k \geq 3w$.

Aby je udowodnić, będziemy na dwa sposoby zliczali liczbę krawędzi, w odniesieniu do liczby ścian oraz liczby wierzchołków.

Zauważmy, że:

(1) ponieważ każda ściana to wielokąt, który ma co najmniej trzy boki oraz każda krawędź wielościanu jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian, więc

$$2k = n_1 + n_2 + \dots + n_s \geq 3s,$$

(2) ponieważ w ścianie i jest n_i wierzchołków (a to dlatego, że w wielokącie wypukłym wierzchołków jest tyle samo co boków), a także z każdego wierzchołka wielościanu wychodzą co najmniej 3 krawędzie oraz każda krawędź łączy 2 wierzchołki, więc

$$2k = n_1 + n_2 + \dots + n_s \geq 3w.$$

Te spostrzeżenia kończą dowód.

Przykład 4

a) Dwudziestościan foremny to wielościan, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, przy czym każdy wierzchołek dwudziestościanu jest wspólny dla 5 ścian. Obliczymy, ile krawędzi oraz ile wierzchołków ma dwudziestościan foremny.

Rozwiązanie

Ponownie wykorzystamy metodę zliczania krawędzi na dwa sposoby.

Zauważmy, że:

- ponieważ każda ściana dwudziestościanu to trójkąt, więc $n_1 = n_2 = \dots = n_{20} = 3$,
- ponieważ każda krawędź wielościanu jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian, więc $2k = n_1 + n_2 + \dots + n_{20} = 20 \cdot 3$, skąd $k = 30$,
- ponieważ z każdego wierzchołka dwudziestościanu wychodzi 5 krawędzi oraz każda krawędź łączy dwa wierzchołki, więc $5w = 2k = 60$, czyli $w = 12$.

Uwaga. Ponieważ każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę 60° , więc wierzchołek wielościanu foremnego, którego ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, może być wspólny dla:

- 5 takich trójkątów (to omówiony powyżej przypadek dwudziestościanu foremnego),
- 4 takich trójkątów – wielościan o tej własności to ośmiościan foremny,
- 3 takich trójkątów – wielościan o tej własności to czworościan foremny.

Rozumując podobnie, jak w przykładzie omówionym w podpunkcie a) obliczymy np. że ośmiościan foremny ma $k = 12$ krawędzi oraz $w = 6$ wierzchołków.

b) Dwunastościan foremny to wielościan, którego wszystkie ściany są przystającymi pięciokątami foremnymi. Obliczymy, ile krawędzi oraz ile wierzchołków ma dwunastościan foremny.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- ponieważ każdy z kątów pięciokąta foremnego ma miarę 108° , więc każdy wierzchołek dwunastościanu jest wspólny dla 3 ścian (dla $n \geq 4$ suma kątów płaskich w narożu wielościanu byłaby większa od 360° , co jest niemożliwe),
- ponieważ każda ściana dwunastościanu to pięciokąt, więc $n_1 = n_2 = \dots = n_{12} = 5$,
- ponieważ każda krawędź dwunastościanu jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian, więc $2k = n_1 + n_2 + \dots + n_{12} = 12 \cdot 5 = 60$, skąd $k = 30$,
- ponieważ z każdego wierzchołka dwunastościanu wychodzą 3 krawędzie oraz każda krawędź łączy dwa wierzchołki, więc $3w = 2k = 60$, czyli $w = 20$.

Uwaga. Ponieważ wierzchołek wielościanu wypukłego jest wspólny dla co najmniej 3 ścian i suma kątów płaskich przy tym wierzchołku jest mniejsza niż 360° , więc kąt płaski

przy wierzchołku wielościanu foremnego jest mniejszy niż 120° . Natomiast w n -kącie foremnym, w którym $n \geq 6$, kąt wewnętrzny spełnia warunek $(1 - \frac{2}{n}) \cdot 180^\circ \geq (1 - \frac{2}{6}) \cdot 180^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$. Wynika stąd, że nie istnieje wielościan foremny, którego ścianą byłby wielokąt foremny o liczbie boków większej niż 5.

c) Pewien wielościan ma 32 ściany, każda z tych ścian to albo pięciokąt foremny, albo sześciokąt foremny, przy czym żadne dwie ściany pięciokątne nie mają wspólnej krawędzi.

Obliczymy, ile ścian pięciokątnych ma ten wielościan oraz ile ma on ogółem krawędzi (k), a także ile jest jego wszystkich wierzchołków (w).

Rozwiązanie

Oznaczmy: przez x - liczbę ścian pięciokątnych oraz przez y - liczbę ścian sześciokątnych. Zatem $x + y = 32$.

Zauważmy, że ponieważ ścianami wielościanu są pięciokąty foremne oraz sześciokąty foremne, więc wierzchołek wielościanu jest wspólny dla dokładnie trzech ścian, co oznacza też, że z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie.

Wobec tego

$$(1) \quad 2k = 3w = 5x + 6y.$$

Jak wiemy, w wierzchołku wielościanu wypukłego mogą się spotkać co najwyżej dwa sześciokąty foremne. Ponadto z warunków zadania wynika, że taki wierzchołek nie może być wspólny dla dwóch lub trzech pięciokątów foremnym.

Oznacza to, że każdy wierzchołek rozpatrywanego wielościanu jest wspólny dla dwóch sześciokątów foremnym i jednego pięciokąta foremnego, a więc

$$(2) \quad w = 5x.$$

Na podstawie wniosków (1) i (2) otrzymujemy więc równanie

$$3 \cdot 5x = 5x + 6y,$$

które możemy przekształcić do postaci $x = \frac{3}{5}y$.

Stąd $y + \frac{3}{5}y = 32$, a więc $y = 20$, czyli $x = 12$.

Wobec tego $w = 5 \cdot 12 = 60$ oraz $k = \frac{3}{2}w = \frac{3}{2} \cdot 60 = 90$.

Zatem rozpatrywany wielościan ma 12 ścian pięciokątnych, 20 ścian sześciokątnych, 90 krawędzi oraz 60 wierzchołków.

Uwaga Wielościan rozpatrywany w podpunkcie c) (nazywany dwudziestościanem ściętym) można uzyskać przez odpowiednie ścięcie naroży w każdym wierzchołku dwudziestościanu foremnego, omawianego w podpunkcie a).

Analizując związek między liczbą wierzchołków (w), krawędzi (k) oraz ścian (s) w graniastosłupach i ostrosłupach zauważyliśmy, że dla tych wielościanów prawdziwa jest zależność

$$w - k + s = 2.$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że zależność ta jest prawdziwa dla każdego z wielościanów rozpatrywanych w poprzednim przykładzie.

Przykład 5

Wykażemy, że zależność $w - k + s = 2$ (nazywana **wzorem Eulera dla wielościanów**) opisuje związek między liczbami wierzchołków (w), krawędzi (k) oraz ścian (s) dowolnego wielościanu wypukłego.

Dowód

Zacniemy od rozłożenia brzegu wielościanu na oddzielne ściany, a następnie będziemy sklejali ściany wielościanu tak, aby ponownie złożyć wielościan do stanu początkowego. Do prawidłowego złożenia wielościanu będzie nam potrzebna jedynie informacja, które dwie ściany sąsiadują ze sobą przez wspólną dla nich krawędź (można o to zawczasu zadbać np. numerując krawędzie i zapisując ten numer przy krawędzi w każdej z dwóch jej wspólnych ścian).

Następnie ze zbioru, w którym są wszystkie ściany wielościanu otrzymane w wyniku omówionego podziału wybierzemy jeden element. Tak otrzymana figura ma jedną ścianę oraz równe liczby wierzchołków oraz krawędzi - na początku mamy więc $w - k + s = 1$.

W pierwszym kroku dokleimy sąsiednią (względem jednej z wybranych krawędzi) ścianę do tej, którą wybraliśmy na początku. Ponieważ doklejana ściana ma z początkową wspólne 2 wierzchołki oraz 1 krawędź, więc liczba dodanych wierzchołków jest o 1 mniejsza od liczby dodanych krawędzi. Ale nasza figura zwiększyła o 1 liczbę ścian, więc nadal prawdziwa jest równość $w - k + s = 1$.

Do otrzymanej figury w każdym kolejnym kroku będziemy doklejać następną ścianę w ten sposób, żeby ostatnia doklejana ściana była jedyną, która będzie miała wszystkie krawędzie i wierzchołki wspólne z figurą otrzymaną w poprzednim kroku.

Rozpatrzmy więc kolejną doklejaną ścianę i założmy, że nie jest to ostatnia ściana do doklejenia.

Oznaczmy wtedy przez n liczbę wspólnych krawędzi tej doklejanej ściany z figurą otrzymaną w poprzednim kroku.

Zauważmy, że wówczas zbiór tych krawędzi tworzy łamaną zwyczajną, w której $n - 1$ wierzchołków jest wspólnych dla dokładnie dwóch krawędzi łamanej, a ponadto są jeszcze 2 krańcowe wierzchołki, które nie zamykają łamanej. Oznacza to, że doklejona ściana ma $n + 1$ wspólnych wierzchołków z figurą otrzymaną w poprzednim kroku.

Zatem w każdym z omawianych przypadków po doklejeniu ściany liczba dodanych wierzchołków jest o 1 mniejsza od liczby dodanych krawędzi, a liczba ścian zwiększyła się o 1. Stąd dla otrzymanej figury prawdziwa jest równość $w - k + s = 1$. Równość ta jest wobec tego prawdziwa po doklejeniu przedostatniej ściany.

Zauważmy, że kiedy doklejamy ostatnią ścianę, to wszystkie jej krawędzie i wierzchołki są wspólne z figurą otrzymaną w poprzednim kroku, więc nie zmienia się liczby w i k . Natomiast liczba ścian zwiększy się w tym momencie o 1, więc ostatecznie dostajemy, że dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi równość $w - k + s = 2$.

W ten sposób dowód został zakończony.

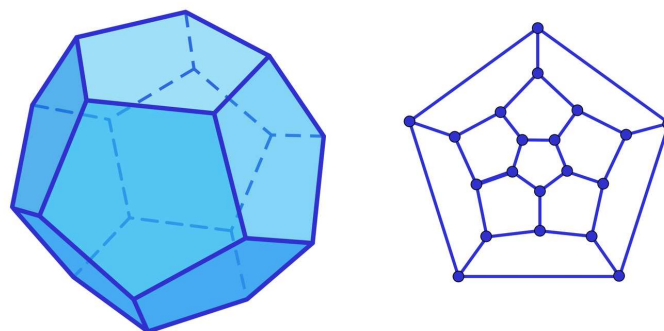
Uwaga. Do analizowania zależności ilościowych między ścianami, wierzchołkami i krawędziami (np. opisanych w powyższym przykładzie) przydatne bywa przedstawienie wielościanu za pomocą jego płaskiego modelu.

Przekształcając wielościan przy użyciu rzutu środkowego z odpowiednio wyznaczonym środkiem i na stosownie dobraną płaszczyznę, równoległą do jednej ze ścian wielościanu (oznaczymy ją jako s_1), można przedstawić płaski model brzegu wielościanu, który spełnia następujące warunki:

- rzut ściany s_1 jest wypełniony przez rzuty pozostałych ścian,
- rzuty wybranych ścian mają wspólny wierzchołek wtedy i tylko wtedy, gdy te wybrane ściany wielościanu mają wspólny wierzchołek,
- rzuty wybranych ścian mają wspólną krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy te wybrane ściany wielościanu mają wspólną krawędź.

Otrzymany w ten sposób płaski model wielościanu nazywa się *diagramem Schlegela*.

Poniżej przedstawiamy diagramy Schlegela (wraz z modelem bryły) kilku omawianych wcześniej wielościanów.



Dwunastościan foremny

Przykład 6

a) Korzystając ze wzoru Eulera dla wielościanów obliczymy liczbę ścian wielościanu wypukłego, wiedząc, że każdy z jego wierzchołków jest wspólny dla 5 trójkątów równobocznych.

Rozwiązanie

Ponieważ każdy z wierzchołków wielościanu jest wspólny dla 5 trójkątów równobocznych, więc zachodzą następujące zależności

$$2k = 5w = 3s,$$

co oznacza, że $k = \frac{3}{2}s$ oraz $w = \frac{3}{5}s$.

Uwzględniając otrzymane zależności we wzorze Eulera otrzymujemy równanie $\frac{3}{5}s - \frac{3}{2}s + s = 2$, skąd $s = 20$.

W ten sposób pokazaliśmy, że założoną własność ma jedynie dwudziestościan (jest to, oczywiście, dwudziestościan foremny).

W analogiczny sposób pokazujemy, że:

- wielościan wypukły, w którym każdy z wierzchołków jest wspólny dla 4 trójkątów równobocznych to ośmiościan foremny,
- wielościan wypukły, w którym każdy z wierzchołków jest wspólny dla 3 trójkątów równobocznych to czworościan foremny,
- wielościan wypukły, w którym każdy z wierzchołków jest wspólny dla 3 kwadratów to sześciąt,
- wielościan wypukły, w którym każdy z wierzchołków jest wspólny dla 3 pięciokątów foremnych to dwunastościan foremny.

b) Korzystając ze wzoru Eulera dla wielościanów wykazemy, że w dowolnym wielościanie wypukłym liczba krawędzi (k), liczba wierzchołków (w) oraz liczba ścian (s) spełniają nierówności:

$$k \geq 6, w \geq 4 \text{ oraz } s \geq 4.$$

Dowód

Ponieważ dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzą nierówności

$$2k \geq 3s \text{ oraz } 2k \geq 3w, \text{ więc:}$$

$$(1) s + w \leq \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k = \frac{4}{3}k,$$

$$\text{co oznacza, że } s + w - k \leq \frac{1}{3}k,$$

$$\text{zatem (na mocy wzoru Eulera dla wielościanów)} 2 \leq \frac{1}{3}k,$$

$$\text{czyli } k \geq 6. \square$$

$$(2) \ 2k - 3w \geq 0,$$

$$\text{skąd } 6 + k + 2k - 3w \geq 6 + k,$$

$$\text{co oznacza, że } 3(2 + k - w) \geq 6 + k,$$

$$\text{zatem (na mocy wzoru Eulera dla wielościanów) } 3s \geq 6 + k;$$

korzystając ze spostrzeżenia poczynionego w podpunkcie a) otrzymujemy

$$3s \geq 6 + k \geq 6 + 6 = 12,$$

$$\text{czyli } s \geq 4. \quad \square$$

$$(3) \ 2k - 3s \geq 0,$$

$$\text{skąd } 6 + k + 2k - 3s \geq 6 + k,$$

$$\text{co oznacza, że } 3(2 + k - s) \geq 6 + k,$$

$$\text{zatem (na mocy wzoru Eulera dla wielościanów) } 3w \geq 6 + k;$$

korzystając ze spostrzeżenia poczynionego w podpunkcie a) otrzymujemy

$$3w \geq 6 + k \geq 6 + 6 = 12,$$

$$\text{czyli } w \geq 4. \quad \square$$

Uwaga. Dla podsumowania zauważmy, że dla dowolnego wielościanu wypukłego prawdziwe są następujące zależności:

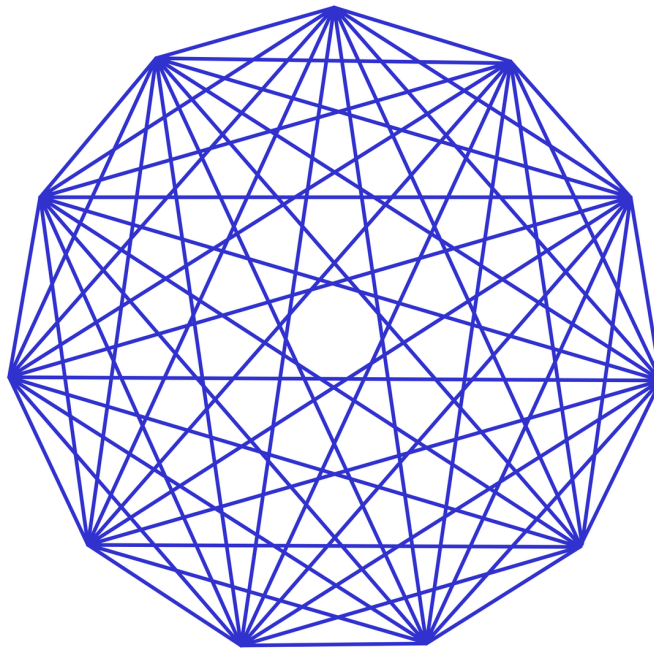
- $6 + k \leq 3s \leq 2k,$
- $6 + k \leq 3w \leq 2k,$

gdzie k, w, s to - odpowiednio - liczba krawędzi, liczba wierzchołków oraz liczba ścian wielościanu.

Przykład 7

W jedenastokącie foremnym poprowadzono wszystkie przekątne.

Wiadomo, że nie istnieją wśród tych przekątnych takie trzy, które mają wspólny punkt (zobacz rysunek).



Obliczmy, na ile części został podzielony ten wielokąt.

Rozwiązanie

Popatrzmy na powyższy rysunek, jak na diagram Schlegela pewnego wielościanu wypukłego.

Wtedy dany jedenastokąt foremny to ściana s_1 , więc szukana liczba części podziału wielokąta to $s - 1$, gdzie s to liczba ścian wielościanu prezentowanego na diagramie (jak zwykle oznaczamy też: k - liczba krawędzi, w - liczba wierzchołków tak otrzymanego wielościanu).

Zauważmy, że

- liczba wierzchołków tego wielościanu jest równa liczbie wszystkich wierzchołków jedenastokąta w sumie z liczbą wszystkich punktów przecięcia par jego przekątnych.

Ponieważ każdy punkt przecięcia jest wyznaczony jednoznacznie przez czworokąt, którego wierzchołkami są wybrane 4 wierzchołki jedenastokąta, więc (skoro w jedenastokącie żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie) ta ostatnia liczba jest równa **liczbie** wszystkich 4-elementowych **kombinacji** zbioru 4-elementowego, czyli $\binom{11}{4} = 330$. Wobec tego $w = \binom{11}{4} + 11 = 330 + 11 = 341$

- liczba krawędzi tego wielościanu jest równa liczbie wszystkich boków jedenastokąta w sumie z liczbą wszystkich odcinków, na które zostały podzielone przekątne wielokąta (punkty podziału to punkty wspólne par przekątnych - jak już powyżej obliczyliśmy, tych punktów jest $\binom{11}{4}$).

Zauważmy, w każdym czworokącie wypukłym punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na 2 części, zatem liczba wszystkich odcinków otrzymanych z wzajemnego podziału par przekątnych jedenastokąta to suma liczby jego przekątnych oraz podwojonej liczby punktów podziału, a więc jest równa

$$\left(\binom{11}{2} - 11 \right) + 2 \cdot \binom{11}{4} = 55 - 11 + 660 = 704.$$

$$\text{Wobec tego } k = 11 + \left(\binom{11}{2} - 11 \right) + 2 \cdot \binom{11}{4} = 55 + 660 = 715$$

Oznacza to, że (na mocy wzoru Eulera dla wielościanów)

$$s = 2 + k - w = 2 + 715 - 341 = 376.$$

Wobec tego szukana liczba części otrzymanych z podziału jedenastokąta jest równa

$$s - 1 = 376 - 1 = 375.$$

Uwaga. Rozumując podobnie, jak w powyższym przykładzie można wykazać, że:

- jeżeli w n -kącie żadne 3 przekątne nie przecinają się w jednym punkcie, to liczba części, na które te przekątne dzielą dany wielokąt jest równa

$$s - 1 = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - n;$$

(na odpowiednio zinterpretowanym diagramie Schlegela widzimy wtedy model wielościanu wypukłego, w którym

$$w = \binom{n}{4} + n \text{ oraz } k = \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4};$$

- jeżeli na okręgu pewnego koła wybierzemy n punktów tak, że po poprowadzeniu wszystkich cięciw o końcach w tych punktach żadne 3 cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie, to liczba punktów podziału koła tymi przekątnymi jest równa

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

(wystarczy zauważyć, że liczba tych podziałów jest o n większa od liczby podziałów ustalonych dla wcześniej omawianego n -kąta - tyle jest bowiem części podziału koła leżących poza tym n -kątem).

Słownik

k -elementowa kombinacja zbioru n -elementowego

każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową kombinacją tego zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Kombinatoryka w stereometrii

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w ostrosłupach,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w graniastosłupach,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w wielościanach foremnych,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w innych wielościanach wypukłych.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

20 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Ułóż po jednym zadaniu w odniesieniu do:

- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w ostrosłupach,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w graniastosłupach,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w wielościanach foremnych,
- liczby ścian, krawędzi, wierzchołków w innych, niż rozpatrzone wcześniej, wielościanach wypukłych.

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami. Zapisz odpowiedź, podając wynik jako liczbę naturalną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Spośród wszystkich wierzchołków sześcianu wybieramy trzy.

Oznaczmy:

przez a - liczbę wszystkich możliwości wybrania w ten sposób wierzchołków trójkąta równobocznego,

przez b - liczbę wszystkich możliwości wybrania w ten sposób wierzchołków równoramiennego trójkąta prostokątnego,

przez c - liczbę wszystkich możliwości wybrania w ten sposób wierzchołków trójkąta nierównoramiennego.

Oceń, czy poniższe równania i nierówności są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz te, które są prawdziwe.

☐ $a + b + c = \binom{8}{3}$

☐ $a > b$

☐ $b > c$

☐ $c > a$

Ćwiczenie 2



Wykonany z jednego kawałka drewna sześcian o krawędzi długości n pomalowano na białą, a następnie podzielono płaszczyznami równoległymi do jego ścian na n^3 sześcianików jednostkowych.

Oznaczmy:

- przez a : dla $n = 11$, liczbę wszystkich takich sześcianików jednostkowych, których żadna ściana nie jest pomalowana na białą.
- przez b : dla $n = 13$, liczbę wszystkich takich sześcianików jednostkowych, których dokładnie 1 ściana pomalowana jest na białą,
- przez c : dla $n = 62$, liczbę wszystkich takich sześcianików jednostkowych, których dokładnie 2 ściany pomalowane są na białą,
- przez d : dla $n = 200$, liczbę wszystkich takich sześcianików jednostkowych, których dokładnie 3 ściany pomalowane są na białą.

Uporządkuj rosnąco liczby a, b, c, d . Złap element i przesun go w górę lub w dół.

b



c



a



d



Ćwiczenie 3



Ten sam n -kąt wypukły jest podstawą ostrosłupa oraz podstawą graniastoslupa. Dodano do siebie sumy liczb ścian, wierzchołków, oraz krawędzi w obu tych wielościanach. Jaką liczbę otrzymano? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 1516

☐ 1518

☐ 1512

☐ 1514

Ćwiczenie 4



Siatkę pewnego wielościanu wypukłego tworzą 33 trójkąty oraz 1 pięciokąt.
Oznaczmy przez w liczbę wierzchołków tego wielościanu.
Zaznacz nierówności prawdziwe.

☐ $18 < w < 25$

☐ $w < 52$

☐ $w > 17$

☐ $26 < w < 51$

Ćwiczenie 5



Poniżej zapisane są stwierdzenia dotyczące pewnych wielościanów wypukłych.
Połącz w pary zdania, które charakteryzują ten sam wielościan.

Ten wielościan wypukły ma 62 wierzchołki i każda z jego ścian jest czworokątem.

Ten wielościan wypukły ma 48 ścian.

Ten wielościan wypukły ma 38 wierzchołków i każda z jego ścian jest pięciokątem.

Ten wielościan wypukły ma 60 ścian.

Ten wielościan wypukły ma 26 wierzchołków i każda z jego ścian jest trójkątem.

Ten wielościan wypukły ma 60 krawędzi.

Ten wielościan wypukły ma 26 wierzchołków i każda z jego ścian jest czworokątem.

Ten wielościan wypukły ma 48 krawędzi.

Ćwiczenie 6



Pewien wielościan wypukły ma 62 ściany i w każdym jego wierzchołku spotykają się 2 czworokąty, 1 pięciokąt i 1 trójkąt. Oblicz ile krawędzi ma ten wielościan. Zapisz w kratkach poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź: .

Ćwiczenie 7



W każdym wierzchołku pewnego wielościanu wypukłego spotykają się 2 dziesięciokąty i 1 trójkąt. Oblicz sumę liczby ścian, liczby wierzchołków oraz liczby krawędzi tego wielościanu. Zapisz w kratkach poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź: .

Ćwiczenie 8



Pewien wielościan wypukły ma 24 wierzchołki. Wyznacz sumę kątów płaskich wszystkich jego ścian. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $24 \cdot 180^\circ$

☐ $22 \cdot 360^\circ$

☐ $24 \cdot 360^\circ$

☐ $22 \cdot 180^\circ$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kombinatoryka w stereometrii

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania polegające na obliczaniu liczby wierzchołków, ścian i krawędzi w graniastopach oraz ostrosłupach,
- określa zależności między liczbą wierzchołków, liczbą ścian oraz liczbą krawędzi w wielościanach foremnych,
- wykorzystuje reguły kombinatoryczne oraz metody zliczania na dwa sposoby elementów tego samego zbioru do obliczania liczby wierzchołków, liczby ścian oraz liczby krawędzi w wielościanach spełniających określone warunki,

- wykorzystuje wzór Eulera w zadaniach dotyczących wielościanów wypukłych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Kombinatoryka w stereometrii” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują testy samosprawdzające.

Materiały pomocnicze:

- [Reguła mnożenia - wprowadzenie](#)
- [Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki](#)
- [Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary](#)

Wskazówki metodyczne:

Testy samosprawdzające można wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.