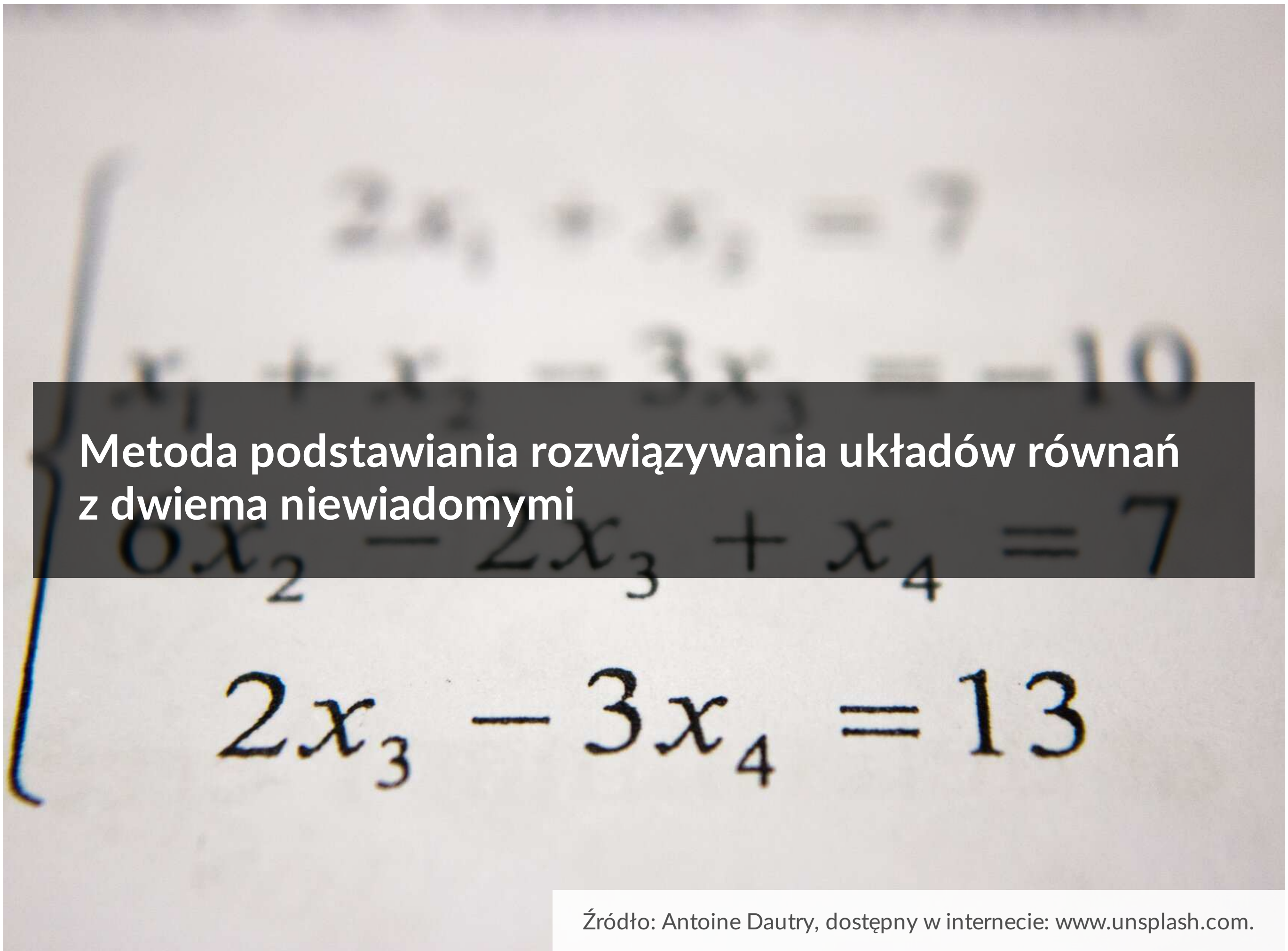
Metoda podstawiania rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi

Metoda podstawiania rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi



Źródło: Antoine Dautry, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Pierwsze układy równań rozwiązywali już kilka tysięcy lat temu matematycy żyjący w starożytnym Babilonie. Na znalezionych glinianych tabliczkach, archeolodzy odkryli układy równań zapisane pismem klinowym. Nie przypominają używanych przez nas symboli matematycznych, jednak metody ich rozwiązywania, używane przez starożytnych Babilończyków, są bardzo zbliżone do tych, które stosujemy obecnie.

Twoje cele

- Przekształcisz układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny.
- Rozwiążesz układ równań liniowych metodą podstawiania.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema (tymi samymi) niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie:
x oraz y – niewiadome,
a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y,
c_1 i c_2 – wyrazy wolne.

przy czym przynajmniej jedna liczba z pary liczb a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 jest różna od zera.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań jest każda para liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Przy czym taki układ równań może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub nie mieć rozwiązania.

Definicja: Równoważne układy równań

Dwa układy równań liniowych z tymi samymi niewiadomymi nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie: Równoważny układ równań

Jeśli z jednego układu równań wyznaczymy jedną niewiadomą i otrzymane wyrażenie podstawimy do drugiego równania, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Aby otrzymać równanie równoważne, możemy wykonać każde z przekształceń:

- uproszczenie wyrażenia znajdujących się po każdej stronie równania;
- pomnożenie obu stron danego równania przez tę samą liczbę (to samo wyrażenie), która w dziedzinie równania nie przyjmuje wartości równych zeru;

- dodanie do obu stron danego równania takiej samej liczby (tego samego wyrażenia).

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $2 \cdot (3 + x) + 4 = \frac{x+5}{2}$.

Opuszczamy nawias znajdujący się po lewej stronie równania.

$6 + 2x + 4 = \frac{x+5}{2}$

Redukujemy wyrażenie znajdujące się po lewej stronie równania.

$2x + 10 = \frac{x+5}{2}$

Mnożymy obie strony równania przez 2.

$4x + 20 = x + 5$

Przenosimy niewiadome na lewą stronę równania, a wyrazy wolne na prawą stronę (dodajemy do obu stron równania taką samą liczbę/takie samo wyrażenie).

$4x - x = 5 - 20$

Dzielimy obie strony równania przez liczbę 3 znajdującą się przy niewiadomej.

$3x = -15$

Otrzymaliśmy rozwiązanie równania.

$x = -5$.

Przykład 2

Aby wyznaczyć z równania jedną z kilku niewiadomych, postępujemy podobnie jak podczas rozwiązywania równań z jedną niewiadomą. Możemy zatem mnożyć lub dzielić obie strony równania przez to samo niezerowe wyrażenie, czy też przenosić wyrażenia na drugą stronę równania. Chcemy, aby wyznaczana zmienna znajdowała się po jednej stronie równania, a wszystkie pozostałe zmienne oraz liczby – po drugiej stronie.

Przekształcimy równanie liniowe z dwiema niewiadomymi tak, aby wyznaczyć z niego wskazaną niewiadomą.

$3x + 2y = 5 \cdot (x + y) + 4$

Wyznaczymy niewiadomą x.

Opuszczamy nawias znajdujący się po prawej stronie równania.

$3x + 2y = 5x + 5y + 4$

Dodajemy do obu stron równania wyrażenie $(-2y)$.

$3x = 5x + 3y + 4$

Dodajemy do obu stron równania wyrażenie $(-5x)$.

$-2x = 3y + 4$

Dzielimy obie strony równania przez (-2).

$x = -\frac{3}{2}y - \frac{4}{2}$

Wyznaczyliśmy z równania niewiadomą x.

$x = -\frac{3}{2}y - 2$

Wyznaczymy teraz niewiadomą y.

Opuszczamy nawias znajdujący się po prawej stronie równania.

$3x + 2y = 5x + 5y + 4$

Dodajemy do obu stron równania wyrażenie $(-5y)$.

$3x - 3y = 5x + 4$

Dodajemy do obu stron równania wyrażenie $(-3x)$.

$-3y = 2x + 4$

Dzielimy obie strony równania przez (-3).

Wyznaczyliśmy z równania niewiadomą y.

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania polega na:

- wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z jednego z równań układu,
- podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej,
- rozwiązaniu otrzymanego równania z jedną niewiadomą,
- podstawieniu otrzymanej wartości niewiadomej do pierwszego równania.

Warto zastanowić się, którą z niewiadomych wyznaczyć. Ma to wpływ na stopień trudności rozwiązywanego równania z jedną niewiadomą.

Przykład 3

Dany jest układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$.

Wyznaczymy niewiadomą x z pierwszego równania.

$-3x + 2y = 5$

$-3x = -2y + 5 \mid : (-3)$

$x = \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}$

Wyznaczymy z pierwszego równania niewiadomą y.

$-3x + 2y = 5$

$2y = 3x + 5 \mid : 2$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

Wyznaczymy teraz niewiadomą x z drugiego równania.

$2x + y = 4$

$2x = -y + 4 \mid : 2$

$x = -\frac{1}{2}y + 2$

Wyznaczymy z drugiego równania niewiadomą y.

$2x + y = 4$

$y = -2x + 4$

Możemy łatwo zauważyć, że najlepszym wyborem jest wyznaczenie niewiadomej y z drugiego równania. W pozostałych pojawiły się ułamki, co będzie podnosić stopień trudności rozwiązania równania otrzymanego po podstawieniu tego wyrażenia.

Przykład 4

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań z Przykładu 3.

$\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do pierwszego równania w miejsce niewiadomej y.

$$\begin{cases} -3x + 2 \cdot (-2x + 4) = 5 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 4x + 8 = 5 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$\begin{cases} -7x = -3 \mid : (-7) \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Otrzymaną wartość x podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -2 \cdot \frac{3}{7} + 4 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{22}{7} \end{cases}.$$

Przykład 5

Dany jest układ równań $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$.

Rozwiążemy ten układ stosując metodę podstawiania.

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania.
(Moglibyśmy też wyznaczyć y z drugiego równania. Spróbuj samodzielnie rozwiązać układ w ten sposób).

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do drugiego równania w miejsce niewiadomej x.

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ 5 \cdot (2y + 10) + y = 6 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ 10y + 50 + y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ 11y = -44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 10 \\ y = -4 \end{cases}$$

Otrzymaną wartość y podstawiamy do pierwszego równania i obliczmy wartość niewiadomej x.

$$\begin{cases} x = 2 \cdot (-4) + 10 \\ y = -4 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Przykład 6

W niektórych układach równań wygodniej jest wyznaczyć wyrażenie zawierające niewiadomą (np. $3x$, $2y$).

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań $\begin{cases} 2x + 7y = 12 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$.

Wyznaczamy wyrażenie $2x$ z pierwszego równania.

$$\begin{cases} 2x = -7y + 12 \\ 2 \cdot (2x) + 3y = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do drugiego równania w miejsce wyrażenia $2x$.

$$\begin{cases} 2x = -7y + 12 \\ 2 \cdot (-7y + 12) + 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} 2x = -7y + 12 \\ -14y + 24 + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -7y + 12 \\ -11y = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -7y + 12 \\ y = 2 \end{cases}$$

Otrzymaną wartość y podstawiamy do pierwszego równania i obliczmy wartość niewiadomej x.

$$\begin{cases} 2x = -7 \cdot 2 + 12 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

równoważne układy równań

układy równań liniowych – układy z tymi samymi niewiadomymi, które mają ten sam zbiór rozwiązań

metoda podstawiania

metoda polegająca na wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania i podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowania metody podstawiania do rozwiązywania układów równań przedstawionymi w animacji. Następnie wykonaj samodzielnie Polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5gXbKsrv

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący rozwiązywania układów równań liniowych metodą podstawiania.

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x+5y=-10 \\ x-y=2 \end{cases}$.

Wybierz takie podstawianie, aby otrzymać najprostszą postać równania z jedną niewiadomą.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

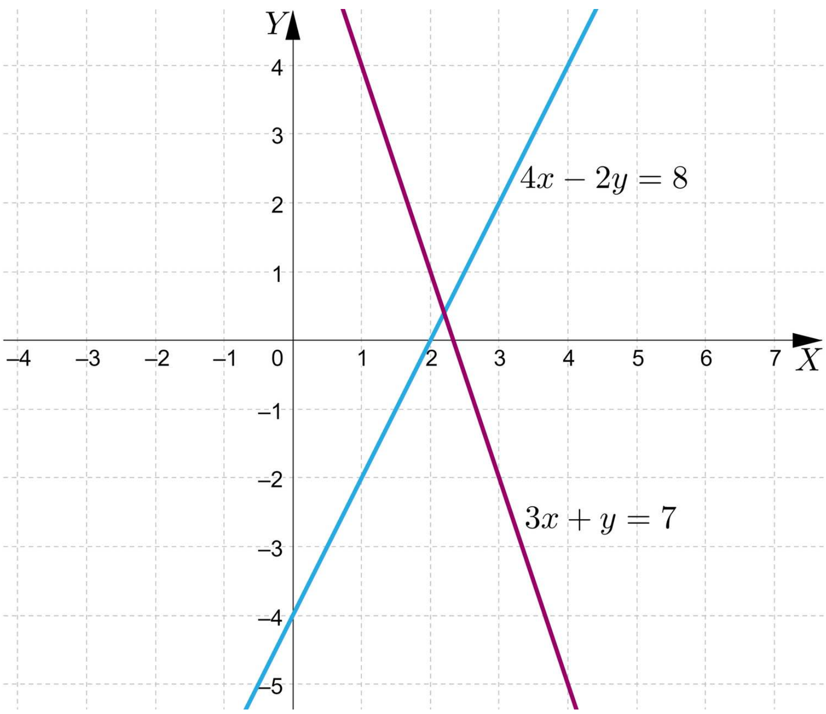
Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Na wykresie przedstawiono ilustrację graficzną układu równań. Korzystając z metody podstawiania, znajdź współrzędne punktu przecięcia się prostych.



Ćwiczenie 7

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania $\begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 1,5y + 2x = 1 \end{cases}$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x + y = m \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ w zależności od parametru m.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Metoda podstawiania rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewidomymi metodą podstawiania
- tworzy algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stacje eksperckie
- analiza przypadku

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą stacji eksperckich.
3. Ośmiu uczniów tworzy cztery grupy eksperckie, które przygotowują informacje na temat metod rozwiązywania równań.
4. Eksperci prezentują w dowolnie wybranej formie, przygotowane przez siebie wiadomości. Przygotowują cztery stacje eksperckie.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie – eksperci kolejno prezentują przygotowane przez siebie informacje. Po prezentacji odpowiadają na pytania pozostałych uczniów i wyjaśniają wątpliwości.

   I. Równoważne przekształcanie równań.
   Uczniowie mogą wykorzystać Przykład 1 z części „Przeczytaj”.

   II. Wyznaczanie z równania wskazanej zmiennej.
   Uczniowie mogą wykorzystać Przykład 2 z części „Przeczytaj”.

   III. Równoważne przekształcanie układów równań liniowych.
   Uczniowie mogą wykorzystać Przykład 3 z części „Przeczytaj”.

   IV. Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą postawiania.
   Uczniowie mogą wykorzystać Przykład 4 i Przykład 5 z części „Przeczytaj”.
2. Pracując w parach, uczniowie zapoznają się animacją i wykonują polecenie 2.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na cztery grupy, które podchodzą do stacji informacyjnych. Każda z grup zadaniowych, rozwiązuje przygotowane przez ekspertów zadania.

4. Eksperci wspierają pozostałych uczniów, wyjaśniają wątpliwości. Nauczyciel nadzoruje pracę grup.
5. Po wykonaniu zadań z danego zakresu, grupy zadaniowe przechodzą do kolejnej stacji.
6. Uczniowie w parach rozwiązują zadania z ćwiczeń 1-4. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Nauczyciel i uczniowie – eksperci wyjaśniają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, omawia pracę ekspertów oraz wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5-8.

Materiały pomocnicze:

- Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- Przekształcanie wzorów
- Układ równań liniowych

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji oraz podczas lekcji powtórzeniowych z działu „Układy równań liniowych”.