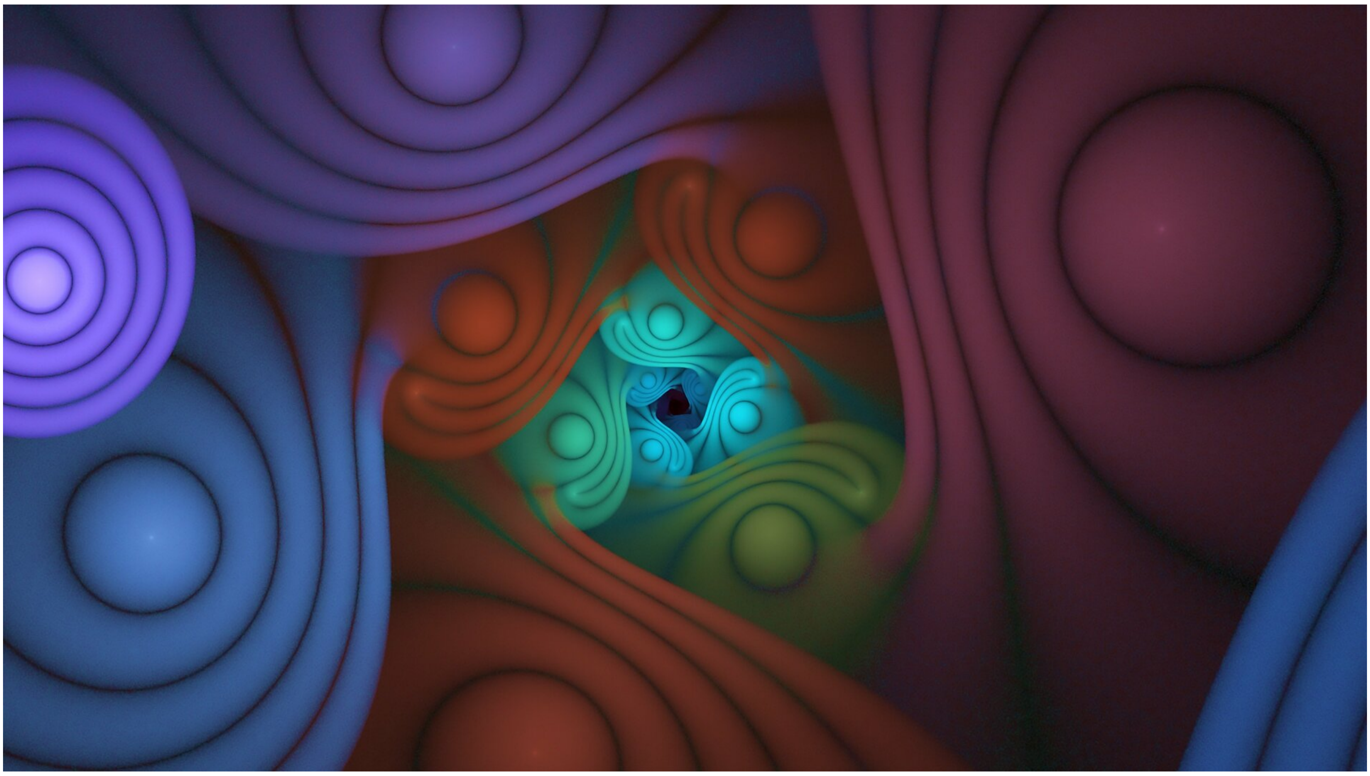

Mnożenie wielomianu przez dwumian

Mnożenie wielomianu przez dwumian

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com.

Szczególnymi przypadkami wielomianów są jednomiany, dwumiany czy trójmiany. Dwumian to wielomian będący sumą dwóch jednomianów. Mnożenie dowolnego wielomianu przez dwumian to krok w kierunku ogólnego obliczania iloczynu dwóch dowolnych wielomianów jednej zmiennej. Często dużo ważniejsza – i bywa, że trudniejsza – jest czynność odwrotna, czyli przekształcenie wielomianu zapisanego w postaci ogólnej do postaci iloczynowej.

Twoje cele

- Pomnożysz wielomian jednej zmiennej przez dwumian.
- Zastosujesz „sprzężenie” dwumianu w przekształceniach algebraicznych.
- Przeanalizujesz przykłady zastosowań wzorów skróconego mnożenia do szybkiego wyznaczania iloczynu wielomianu przez dwumian.

Przeczytaj

Dwumianem nazywamy wyrażenie, które jest sumą dwóch jednomianów.

Dwumian jest wielomianem postaci $F(x) = px^k + qx^m$ (zakładamy, że $p \neq 0$ i $q \neq 0$).

Dwumian $G(x) = px^k - qx^m$ zwyczajowo nazywany jest „sprzężeniem” dwumianu $F(x)$.

Przykład 1

Podamy sprzężenia dwumianów:

a. $2x + 5$,
b. $5x^2 - 7x$,
c. $x^{11} + x^7$,
d. $x^9 - 1$.

Rozwiązanie:

a. $2x - 5$,
b. $5x^2 + 7x$,
c. $x^{11} - x^7$,
d. $x^9 + 1$.

Ważne!

Aby wykonać mnożenie wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

przez dwumian $F(x) = px^k + qx^m$, należy każdy wyraz wielomianu $W(x)$ pomnożyć przez każdy wyraz dwumianu $F(x)$:

$$W(x) \cdot F(x) = F(x) \cdot W(x) = \left(px^k + qx^m\right) \cdot W(x) = px^k \cdot W(x) + qx^m \cdot W(x).$$

Mnożenie to jest przemienne.

Przykład 2

Wykonamy mnożenie $\left(5x^3 - x^2\right) \cdot \left(x^7 - 2x^4 + 5x + 3\right)$.

Rozwiązanie:

- Mnożymy $5x^3$ przez każdy składnik wielomianu $\left(x^7 - 2x^4 + 5x + 3\right)$:
  $5x^{10} - 10x^7 + 25x^4 + 15x^3$.
- Następnie mnożymy $\left(-x^2\right)$ przez każdy składnik wielomianu $\left(x^7 - 2x^4 + 5x + 3\right)$:
  $-x^9 + 2x^6 - 5x^3 - 3x^2$.

- Po dodaniu, pogrupowaniu i zredukowaniu wyrazów podobnych uzyskujemy: $5x^{10} - x^9 - 10x^7 + 2x^6 + 25x^4 + 10x^3 - 3x^2$.

Mnożąc dwumian przez jego „sprzężenie”, możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

- $(3x+5) \cdot (3x-5) = 9x^2 - 25$,
- $\left(7x^{11} - 5x^9\right) \cdot \left(7x^{11} + 5x^9\right) = 49x^{22} - 25x^{18}$,
- $\left(x^7 - 1\right) \cdot \left(x^7 + 1\right) = x^{14} - 1$,
- $\left(-x^2 + x\right) \cdot \left(-x^2 - x\right) = x^4 - x^2$.

Przykład 3

Wyznaczymy wartości parametrów m, p, q, dla których wielomiany
$F(x) = x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 7x^2 + px + q$ oraz
$G(x) = \left(x^2 + m\right)\left(x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 8\right)$ są równe.

Rozwiązanie:

Wykonujemy mnożenie i przedstawimy wielomian G w postaci uporządkowanej:

$$G(x) = x^6 - 2x^5 - 5x^4 - 8x^2 + mx^4 - 2mx^3 - 5mx^2 - 8m$$

$$G(x) = x^6 - 2x^5 + (m-5)x^4 - 2mx^3 + (-5m-8)x^2 - 8m$$

Wielomiany tych samych zmiennych są równe, jeśli są tego samego stopnia
i współczynniki stojące przy zmiennych w tych samych potęgach są równe.

Współczynniki przy zmiennych w potędze szóstej są równe, podobnie w potędze piątej.

Porównamy zatem pozostałe współczynniki:

- przy x^4:

$$m - 5 = -8$$

$$m = -3$$

- przy x^3:

$$6 = -2m$$

$$m = -3$$

- przy x^2:

$-5m-8=7$

$m=-3$

W każdym przypadku otrzymaliśmy dla m tę samą liczbę, zatem $m=-3$.

W wielomianie G nie ma wyrazu w pierwszej potędze, zatem: $p=0$

Na koniec porównujemy wyrazy wolne: $q=-8m$, co daje: $q=(-8)\cdot(-3)=24$

Zatem wielomiany F i G są równe, jeśli: $m=-3$, $p=0$, $q=24$.

W mnożeniu wielomianu przez dwumian mogą pomóc wzory skróconego mnożenia.

Przykład 4

Przykłady zastosowania wzorów skróconego mnożenia w mnożeniu wielomianów przez dwumian $(x+1)$ oraz przez dwumian $(x-1)$:

- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$,
- $(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)=x^3-1$,
- $(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$,
- $(x-1)\cdot\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)=x^n-1$,
- $(x+1)\cdot\left(x^{2n}-x^{2n-1}+\ldots-x+1\right)=x^{2n+1}+1$.

Słownik

wielomian

wyrażenie, które jest sumą jednomianów;
wielomian można zapisać w postaci

$$W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

dwumian

wyrażenie, które jest sumą dwóch jednomianów;
dwumian to wielomian postaci $F(x)=px^k+qx^m$ (zakładamy, że $p\neq 0$ i $q\neq 0$);
dwumian $G(x)=px^k-qx^m$ jest zwyczajowo nazywany „sprzężeniem” dwumianu $F(x)$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą mnożenie wielomianu przez dwumian, a następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Wykonaj mnożenie i przedstaw w postaci uporządkowanej otrzymane sumy.

- $2 \cdot \left(5x^7 - 4x^2\right) \cdot \left(x^3 - 5x^2 - x + 11\right)$,
- $\left(x^{100} + 3x^{10}\right) \cdot \left(x^{20} + 2x^{15} + 3x^{10} + 4x^5\right)$,
- $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x\right) \cdot \left(24x^7 - 60x^5 - 36x^3 + 12x\right)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Mnożenie wielomianu przez dwumian

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres roszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- mnoży wielomian jednej zmiennej przez dwumian;
- wykorzystuje „sprzężenie” dwumianu w obliczeniach;
- analizuje przykłady zastosowań wzorów skróconego mnożenia do szybkiego mnożenia wielomianu przez dwumian;
- analizuje i formułuje własności iloczynu wielomianu przez dwumian.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Prezentacja multimedialna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Podanie przez nauczyciela tematu i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie wiadomości uzyskanych po zapoznaniu się z treściami sekcji „Przeczytaj".

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z prezentacją multimedialną. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności w wykonywaniu zadania prezentowanego w prezentacji, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe momenty rozwiązania.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 5–osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3–6 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 7–8 z sekcji „Sprawdź się". Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

Uczniowie opracowują infografikę ilustrującą zasady mnożenia wielomianów przez dwumian.

Materiały dodatkowe:

- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może zostać wykorzystana jako zadanie domowe lub przy powtórzeniu materiału. Może być też wykorzystana na zajęciach poświęconych przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.