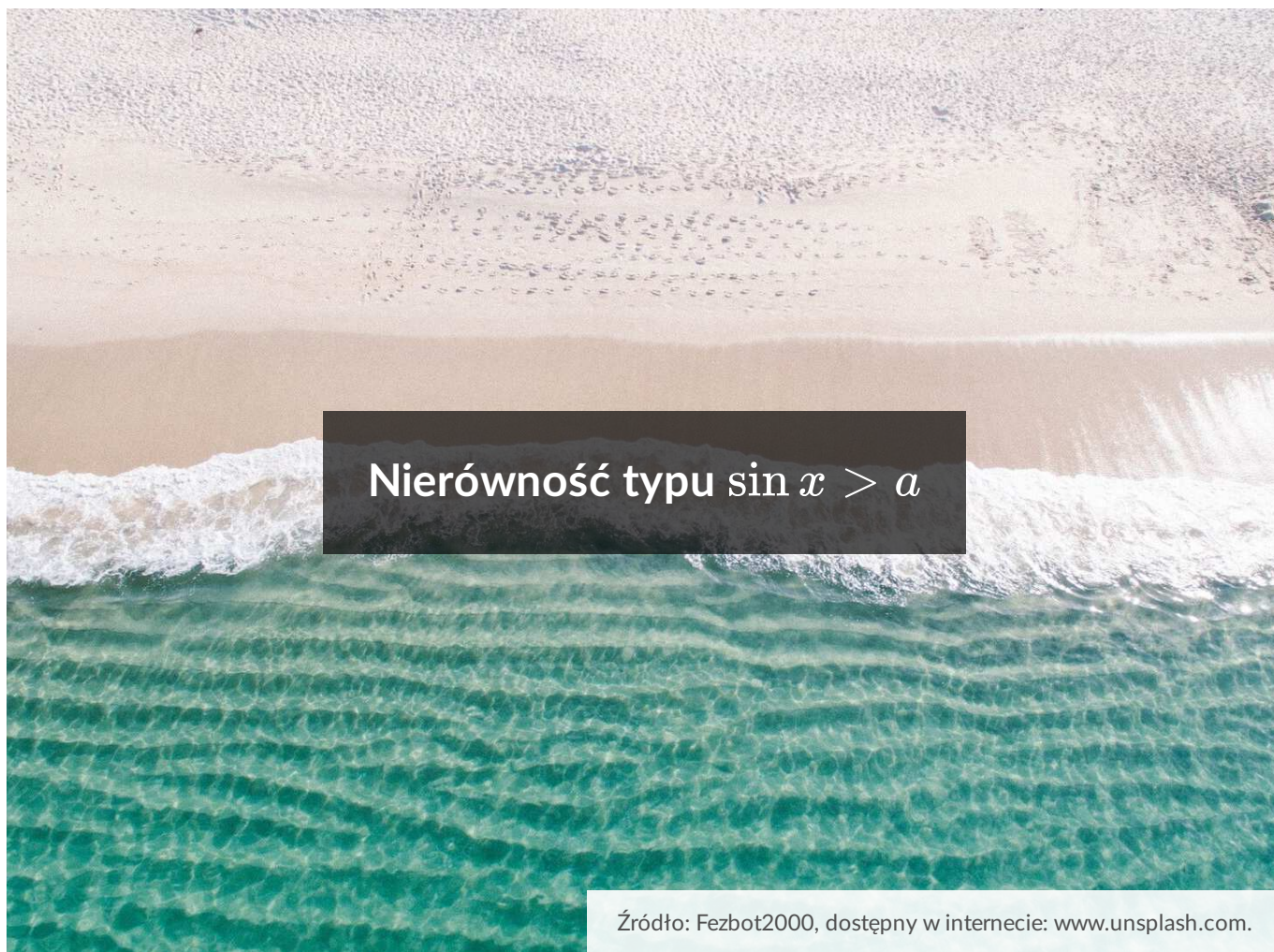




Nierówność typu $\sin x > a$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Nierówność typu $\sin x > a$

Źródło: Fezbot2000, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Na lekcji nauczymy się rozwiązywać równania typu: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Będziemy korzystać z wykresu funkcji sinus oraz własności tej funkcji. Koniecznie przypomnij sobie, w jaki sposób rozwiązywaliśmy równania trygonometryczne typu $\sin x = a$.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać proste nierówności trygonometryczne typu: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \geq a$.
- Zobaczysz zastosowania do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych o bardziej złożonym charakterze.

Przeczytaj

Na lekcji nauczymy się rozwiązywać równania typu: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym celu będziemy korzystać z metody rozwiązywania równań trygonometrycznych typu $\sin x = a$. Przypomnijmy stosowne twierdzenie:

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego $\sin x = a$

Algorytm szukania rozwiązań równania $\sin x = a$.

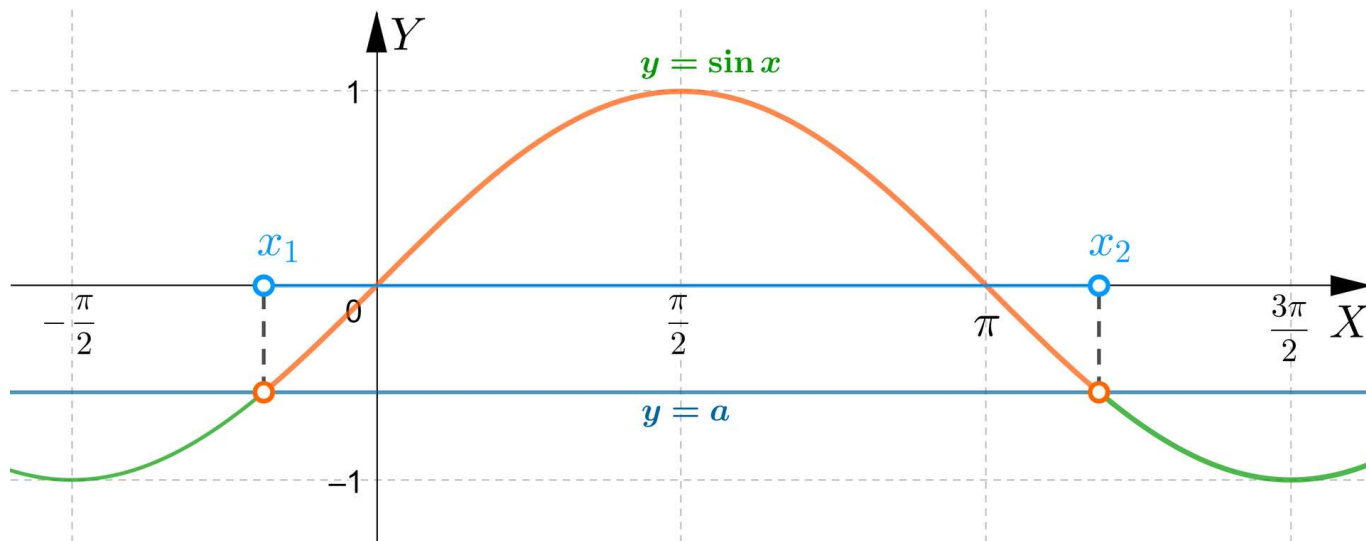
- Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\sin x_0 = a$.
- Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Znajdujemy drugie rozwiązanie $\pi - x_0$.
- Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy, jak rozwiązać nierówność $\sin x > a$.

Rozważmy przypadki:

1. Niech $a < -1$. Wówczas nierówność $\sin x > a$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.
2. Niech $a \geq 1$. Wówczas rozwiązaniem nierówności $\sin x > a$ jest zbiór pusty.
3. Niech $a \in (-1, 1)$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$. Dlaczego wybieramy taki przedział? Po pierwsze okresem zasadniczym funkcji sinus jest $T = 2\pi$, a wybrany przedział ma długość 2π . Po drugie, jak zobaczymy na rysunku, w tym przedziale rozwiązanie nierówności $\sin x > a$ będzie można przedstawić w postaci jednego przedziału (a nie sumy przedziałów); dzięki temu dostaniemy wygodniejszą formę zapisu rozwiązania nierówności.



Spójrzmy na rysunek. Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\sin x > a$, będziemy w istocie badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$.

Zaznaczmy na pomarańczowo ten fragment wykresu funkcji $y = \sin x$, który leży powyżej prostej $y = a$. Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji $y = \sin x$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne to x_1 i x_2 - są to rozwiązania równania $\sin x = a$.

Zatem w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in (x_1, x_2)$.

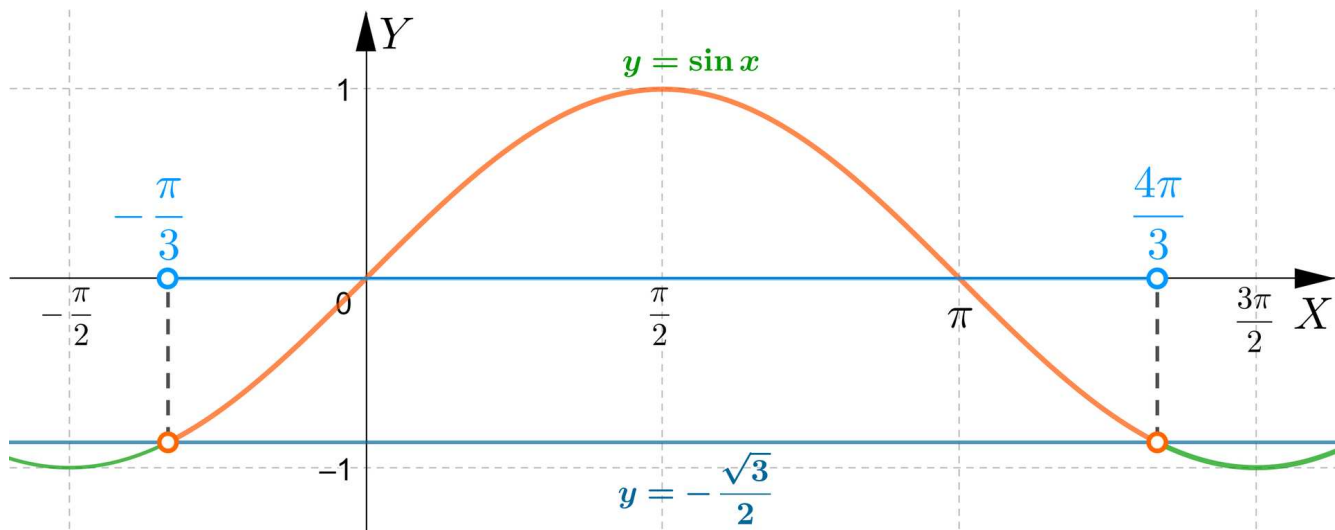
Wykorzystując okresowość funkcji sinus podajemy rozwiązanie nierówności $\sin x > a$: jest to suma wszystkich przedziałów $(x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Spójrzmy na poniższy wykres.



Najpierw, korzystając z **twierdzenia o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego** $\sin x = a$ rozwiążemy równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$: $x = -\frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{4\pi}{3}$.

Zatem w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ rozwiązaniem nierówności $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest przedział $(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$.

Wykorzystując okresowość funkcji sinus podajemy rozwiązanie nierówności $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$: jest to suma wszystkich przedziałów $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Rozwiążemy tę nierówność bazując na nierówności rozwiązanej w przykładzie 1.

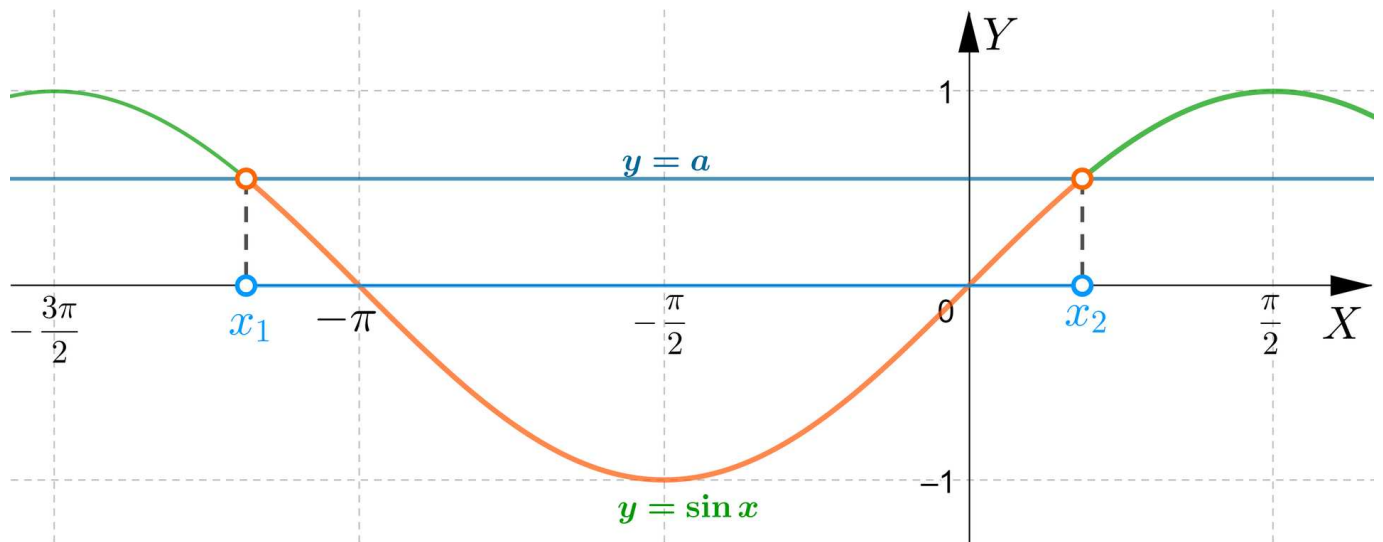
Skoro rozwiązaniem nierówności $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ była suma wszystkich przedziałów $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to rozwiązaniem nierówności $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ będzie suma wszystkich przedziałów $\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy, jak rozwiązać nierówność $\sin x < a$.

Rozważmy przypadki:

1. Niech $a > 1$. Wówczas nierówność $\sin x < a$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.
2. Niech $a \leq -1$. Wówczas rozwiązaniem nierówności $\sin x < a$ jest zbiór pusty.
3. Niech $a \in (-1, 1)$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Dlaczego wybieramy taki przedział? Po pierwsze okresem zasadniczym funkcji sinus jest $T = 2\pi$, a wybrany przedział ma długość 2π . Po drugie, jak zobaczymy na poniższym rysunku, w tym przedziale rozwiązanie nierówności $\sin x < a$ będzie można przedstawić w postaci jednego przedziału (a nie sumy przedziałów); dzięki temu uzyskamy wygodniejszą formę zapisu rozwiązania nierówności.



Spójrzmy na rysunek. Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\sin x < a$, będziemy w istocie badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$.

Zaznaczmy na pomarańczowo ten fragment wykresu funkcji $y = \sin x$, który leży poniżej prostej $y = a$. Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne to x_1 i x_2 - są to rozwiązania równania $\sin x = a$.

Zatem w przedziale $\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in (x_1, x_2)$.

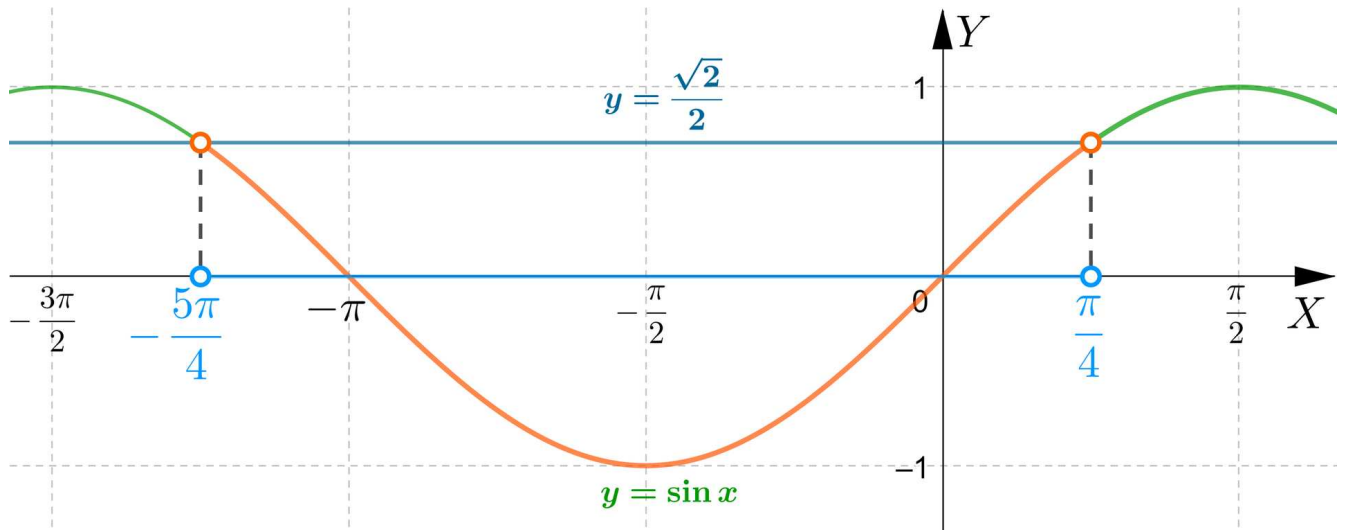
Wykorzystując okresowość funkcji sinus podajemy rozwiązanie nierówności $\sin x > a$: jest to suma wszystkich przedziałów $(x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Spójrzmy na poniższy wykres.



Najpierw, korzystając z **twierdzenia o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego** $\sin x = a$, rozwiązujemy równanie $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$: $x = -\frac{5\pi}{4}$ lub $x = \frac{\pi}{4}$.

Zatem w przedziale $\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ rozwiązaniem nierówności $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ jest przedział $(-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Wykorzystując okresowość funkcji sinus podajemy rozwiązanie nierówności $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: jest to suma wszystkich przedziałów $(-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego $\sin x = a$

Algorytm szukania rozwiązań równania $\sin x = a$.

- Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\sin x_0 = a$.
- Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Znajdujemy drugie rozwiązanie $\pi - x_0$.
- Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją, a następnie wykonaj umieszczone pod nią polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DknpPqH>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego nierówności typu sinus x większy od a .

Polecenie 2

Wskaż rozwiązanie nierówności $4 \sin^2 x \leq 3$.

$\langle k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \rangle \cup (\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$\langle 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle \cup (\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Polecenie 3

Zaznacz rozwiązanie nierówności $(\sin x - 2) \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) < 0$ w przedziale $(0, \pi)$.




$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

$(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

$(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$

$(0, \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{3\pi}{8}, \pi)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż nierówności, które spełnia liczba $x = \frac{\pi}{7}$.

$\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2x \leq \frac{1}{2}$

$\sin x < \frac{1}{2}$

$\sin 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 2



Wskaż rozwiązanie nierówności $\sin 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(-\frac{3\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(-\frac{3\pi}{8} + 2k\pi, -\frac{\pi}{8} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Każdej nierówności przyporządkuj jej rozwiązanie.

Zbiór pusty

Zbiór liczb rzeczywistych

$\sin x \leq \sqrt{6} - \sqrt{13}$

$\sin 4x < -0, (9)$

$2 \sin(2x + 1) < \sqrt{12} - \sqrt{2}$

$\sin 2x > x^2 + 2x + 2$

$\sin 4x \leq 0, (9)$

$\sin^2 3x \geq 1 - \sqrt{2}$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary nierówności, które mają te same rozwiązania.

$$\sin^2 x > \frac{1}{9}$$

$$|\sin x| > \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 2x > \frac{1}{4}$$

$$|\sin 2x| > \frac{1}{2}$$

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

$$(3 - \sin x)(2 \sin x - 1) > 0$$

$$\sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\sin 2x - \sqrt{2})(2 \sin 2x + \sqrt{3}) > 0$$

Ćwiczenie 5



Wskaż nierówność, która dla parametru $a = 3$ ma rozwiązanie: $\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x \leq \frac{3a-7}{5a-11}$

$\sin x \geq \frac{a-2}{2a-4}$

$\sin x < \frac{a-2}{a-5}$

$\sin x \leq \frac{3a-7}{a-7}$

Ćwiczenie 6



Rozwiązaniem nierówności $(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$ w przedziale $(0, 2\pi)$ jest

$(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$

$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$

$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

$(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązaniem nierówności

$$\sin 2x < \frac{2a+1}{a-1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność $(2 \sin 2x + 1)(2 \sin^2 x - 1) > 0$ w przedziale $(0, \pi)$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność typu $\sin x > a$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje proste nierówności trygonometryczne typu: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \geq a$.
- znajduje zastosowania do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych o bardziej złożonym charakterze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda sytuacyjna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się ze sposobami rozwiązywania nierówności trygonometrycznych przedstawionymi w filmie samouczku.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Nierówność typu $\sin x > a$ ” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Nierówność typu $\sin x > a$ ”).

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Nierówność typu $\sin x > a$ ”.