



Rozwiązywanie nierówności z funkcją tangens

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności z funkcją tangens

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Nauczyłeś się już rozwiązywać nierówności typu: $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym e-materiale będziemy sprowadzać trudniejsze nierówności trygonometryczne do postaci zapisanych powyżej nierówności. Przypomnimy sobie także typowe techniki rozwiązywania nierówności. Nauczysz się rozwiązywać nierówności typu: $\operatorname{tg} 3x > \operatorname{tg} 2x$.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać nierówności trygonometryczne z parametrami.
- Przypomnisz sobie typowe techniki rozwiązywania nierówności.

Przeczytaj

Na lekcji zapoznamy się z przykładami nierówności z funkcją tangens. Będziemy w szczególności rozwiązywać nierówności z wartością bezwzględną. Przypomnijmy zatem, jak rozwiązujemy takie nierówności.

Podstawową metodą jest rozważanie przypadków.

Zatem każdą wartość bezwzględną rozważamy w dwóch przypadkach w zależności od tego, jakiego znaku jest wyrażenie znajdujące się pod wartością bezwzględną.

Na przykład wyrażenie $|2x - 3|$ można zapisać następująco:

$$2x - 3 \text{ dla } x \geq \frac{3}{2}$$

oraz

$$3 - 2x \text{ dla } x < \frac{3}{2}.$$

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \geq 0$.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia.

Aby istniał $\operatorname{tg} 2x$: $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

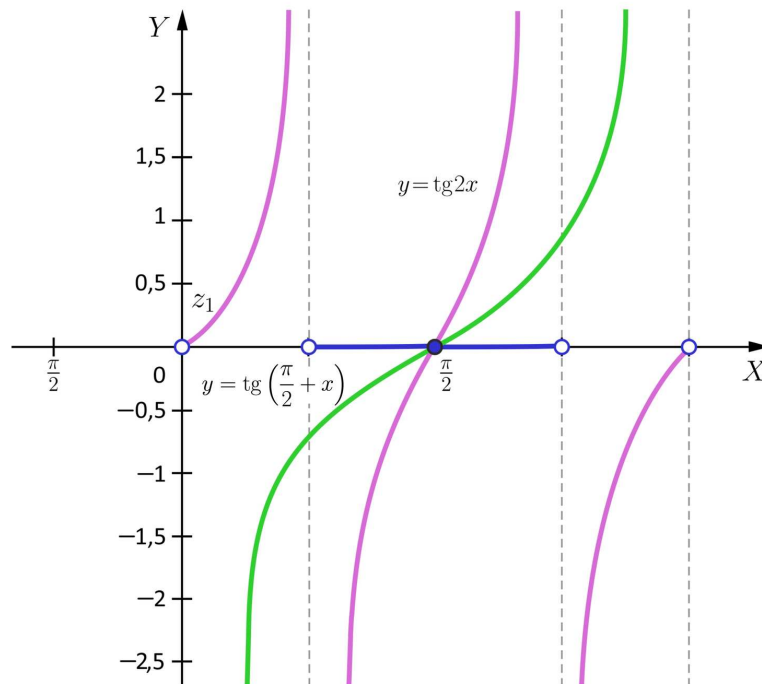
Aby istniał $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$: $\frac{\pi}{2} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rysujemy dwa wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} 2x$ oraz $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ i odczytujemy dla jakich argumentów we wspólnej dziedzinie funkcje $y = \operatorname{tg} 2x$ i $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ mają ten sam znak lub jedna z nich przyjmuje wartość 0.

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} 2x$ otrzymujemy przekształcając wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w powinowactwie o osi Y i skali $\frac{1}{2}$.

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ otrzymujemy przekształcając wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w przesunięciu o wektor $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg} 2x$ jest $T_1 = \frac{\pi}{2}$. Okresem zasadniczym funkcji $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ jest $T_2 = \pi$. Zatem możemy rozwiązać nierówność na przedziale o długości π np. $(0, \pi)$, a następnie uogólnić na całą dziedzinę.



Z wykresów odczytujemy **rozwiązanie nierówności** $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $\operatorname{tg}(\pi - x)|\operatorname{tg} x| > 3$.

Rozwiązanie

Najpierw, korzystając ze wzorów redukcyjnych zapiszmy, że $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$.

Nierówność przyjmuje postać $-\operatorname{tg} x|\operatorname{tg} x| > 3$, czyli $\operatorname{tg} x|\operatorname{tg} x| < -3$.

Zauważmy, że jeżeli $\operatorname{tg} x \geq 0$, to nierówność nie jest spełniona dla żadnego argumentu.

Jeżeli $\operatorname{tg} x < 0$, to nierówność z zadania przyjmuje postać $\operatorname{tg}^2 x > 3$. Zatem w połączeniu z założeniem $\operatorname{tg} x < 0$ otrzymujemy nierówność $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

Zatem rozwiązaniem jest zbiór $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $|\operatorname{tg} x + 2| < 2\operatorname{tg} x + 1$.

Rozwiązanie

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1

Niech $\operatorname{tg} x + 2 \geq 0$.

Wówczas nierówność przyjmuje postać $\operatorname{tg} x + 2 < 2 \operatorname{tg} x + 1$.

Po uwzględnieniu założenia $\operatorname{tg} x + 2 \geq 0$ dostajemy $1 < \operatorname{tg} x$.

Rozwiązaniem nierówności w przypadku 1. jest zbiór $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przypadek 2

Niech $\operatorname{tg} x + 2 < 0$.

Wówczas nierówność przyjmuje postać $-\operatorname{tg} x - 2 < 2 \operatorname{tg} x + 1$.

Dostajemy $-3 < 3 \operatorname{tg} x$, czyli $-1 < \operatorname{tg} x$.

Przy założeniu, że $\operatorname{tg} x + 2 < 0$ otrzymujemy sprzeczność.

Zatem rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

W przykładzie 4 zaprezentujemy metodę podstawiania. Metodę tę stosujemy wtedy, gdy nierówność np. trygonometryczną możemy sprowadzić do nierówności wielomianowej poprzez podstawienie w miejsce funkcji trygonometrycznej nowej zmiennej. Oczywiście, po zakończeniu rozwiązywania nierówności z nową zmienną, należy rozwiązać odpowiednie proste nierówności trygonometryczne.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > \sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Przenieśmy wyrażenie z prawej strony nierówności i sprowadźmy do wspólnego mianownika

$$\frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > 0.$$

Nierówność jest równoważna nierówności

$$(\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3})(1 - \operatorname{tg}^2 x) > 0.$$

Podstawmy $t = \operatorname{tg} x$.

Otrzymujemy nierówność wielomianową

$$(\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3})(1 - t^2) > 0.$$

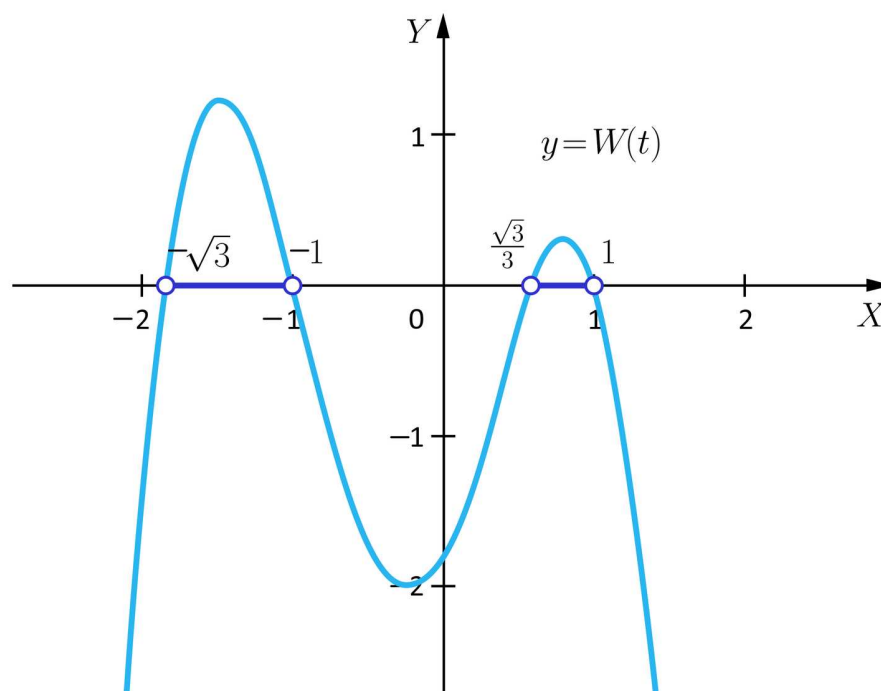
Znajdujemy pierwiastki trójmianu $\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3}$.

$$\Delta = 4 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 16$$

$$t = \frac{-2-4}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \text{ lub } t = \frac{-2+4}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zatem wielomian $W(t) = (\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3})(1 - t^2)$ ma pierwiastki $1, (-1), \left(-\sqrt{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rysujemy wykres wielomianu $W(t)$.



Rozwiązaniem nierówności $(\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3})(1 - t^2) > 0$ jest zbiór $(-\sqrt{3}, -1) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

Zatem $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < -1$ lub $\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$.

Stąd otrzymujemy rozwiązanie nierówności $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} > \sqrt{3}$, $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

rozwiązanie nierówności

zbiór wszystkich elementów dziedziny nierówności, które spełniają tę nierówność

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją, a następnie wykonaj polecenie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6drELRn1>

Film nawiązujący do treści materiału na temat rozwiązywania nierówności z funkcją tangens.

Polecenie 2

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $x \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \geq 2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x > 0$.

- ☐ $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \cup (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Wskaż rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg} x |\operatorname{tg} x| < 1$.

- ☐ $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówności, które mają takie samo rozwiązanie.

$$|\operatorname{tg} x - 2| < |\operatorname{tg} x + 1|$$

$$\operatorname{tg} x < \frac{3}{2}$$

$$|\operatorname{tg} x - 3| > \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{2} < \operatorname{tg} x$$

$$|2 \operatorname{tg} x - 1| < |2 \operatorname{tg} x + 3|$$

$$\operatorname{tg} x < -1$$

$$|\operatorname{tg} x| > \operatorname{tg} x + 2$$

$$-\frac{1}{2} < \operatorname{tg} x$$

Ćwiczenie 4



W puste pole wstaw odpowiednią wartość.

Rozwiązaniem nierówności

$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x > 0$ jest zbiór , gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Ćwiczenie 5



Wskaż nierówności, których rozwiązaniem jest zbiór równy dziedzinie nierówności.

☐ $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} > 1 - x - x^2$

☐ $\operatorname{tg}^2(\pi x) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\pi x)} \geq x - 2x^2 + \frac{15}{8}$

☐ $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \geq 1 - x - x^2$

☐ $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 1 - x - x^2$

☐ $\operatorname{tg}^2(\pi x) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\pi x)} > x - 2x^2 + \frac{15}{8}$

☐ $\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \geq 1 - x - x^2$

Ćwiczenie 6



Nierówność $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 < 0$ ma takie samo rozwiązanie jak nierówność

☐ $|\operatorname{tg} x - 1| < 2$

☐ $|2 \operatorname{tg} x - 1| > 3$

☐ $|2 \operatorname{tg} x - 1| > 2$

☐ $|2 \operatorname{tg} x - 1| < 3$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg}^6 x - 7 \operatorname{tg}^2 x - 6 \leq 0$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg} 2x < \operatorname{tg} x$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności z funkcją tangens

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności trygonometryczne funkcją tangens z parametrem,
- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Rozwiązywanie nierówności z funkcją tangens” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwiązywanie nierówności z funkcją tangens”.