




Zastosowania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

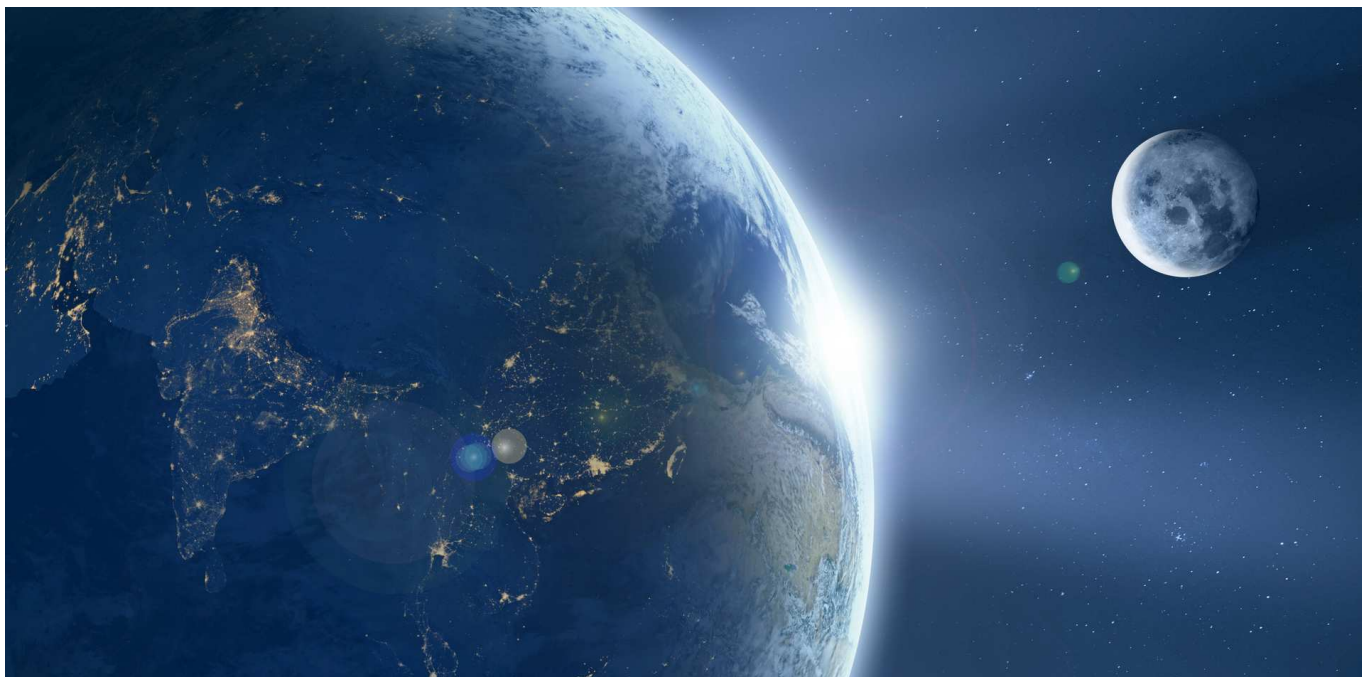


Zastosowania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Ziemia widziana z Księżyca

Źródło: The New York Public Library, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Przybliżoną odległość Ziemi od Słońca (obarczoną bardzo dużym błędem) jako pierwszy policzył Arystarch. Wymyślił on bardzo pomysłową metodę, polegającą na pomiarze kąta zawartego między kierunkiem do Księżyca a kierunkiem do Słońca – w momencie, gdy oświetlona była dokładnie połowa tarczy Księżyca. Arystarch przyjął, że wtedy Księżyc jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta prostokątnego Ziemia – Księżyc – Słońce. Z tego trójkąta łatwo policzyć, ile razy dalej z Ziemi jest do Słońca niż do Księżyca.



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

- Wykorzystasz definicje funkcji trygonometrycznych kątów ostrych do rozwiązywania trójkątów prostokątnych.
- Korzystając z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora znajdziesz przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych lub wartości kątów.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Przeczytaj

W tym materiale zastosujemy przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań, w których obliczyć należy długość boku lub miarę kąta.

Wykorzystamy w tym celu definicje funkcji trygonometrycznych.

Definicja: Sinus kąta α

Sinusem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Definicja: Cosinus kąta α

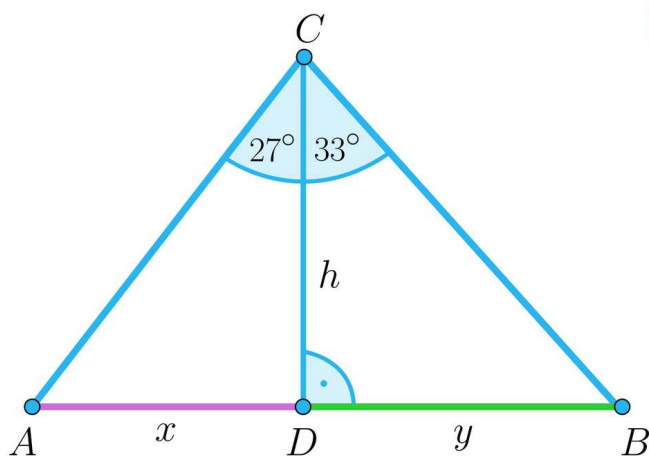
Cosinusem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Definicja: Tangens kąta α

Tangensem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości drugiej przyprostokątnej.

Przykład 1

Kąty między bokami i wysokością trójkąta są odpowiednio równe 33° i 27° . Obliczymy pole i obwód tego trójkąta wiedząc, że jego wysokość h ma długość 4 cm. Wynik podamy z dokładnością do 0,1 cm.



trójkąt ADC jest prostokątny,
trójkąt CDB jest prostokątny, } ponieważ CD jest wysokością

Przyjmijmy oznaczenia:

$|CD| = h$ – długość wysokości trójkąta ABC

Do obliczenia pola trójkąta potrzebna jest długość boku AB , który jest sumą odcinków x i y .

Ponieważ trójkąt ADC jest prostokątny, to korzystając z funkcji tangens wyliczymy x :

$$\frac{x}{h} = \operatorname{tg} 27^\circ, \text{ odczytujemy z tablic: } \operatorname{tg} 27^\circ \approx 0,5095$$

$$x = h \cdot \operatorname{tg} 27^\circ \approx 4 \cdot 0,5095 = 2,038 \approx 2$$

$$x \approx 2 \text{ cm}$$

Ponieważ trójkąt CDB jest prostokątny, to korzystając z funkcji tangens wyliczymy y :

$$\frac{y}{h} = \operatorname{tg} 33^\circ, \text{ odczytujemy z tablic: } \operatorname{tg} 33^\circ \approx 0,6494$$

$$y = h \cdot \operatorname{tg} 33^\circ \approx 4 \cdot 0,6494 = 2,5976 \approx 2,6$$

$$y \approx 2,6 \text{ cm}$$

długość podstawy AB trójkąta ABC : $|AB| = x + y = a$

$$|AB| \approx 2 + 2,6 = 4,6 = a$$

$$|AB| \approx 4,6 \text{ cm}$$

Pole trójkąta obliczymy ze wzoru:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$P \approx \frac{4,6 \cdot 4}{2} = 9,2$$

$$P \approx 9,2 \text{ cm}^2$$

Przejdziemy teraz do wyliczenia obwodu trójkąta ABC . W tym celu, wykorzystując funkcje trygonometryczne, podamy długości boków AC i CB .

Długość boku AC wyznaczymy korzystając z funkcji cosinus:

$$\frac{h}{|AC|} = \cos 27^\circ, \text{ odczytujemy z tablic } \cos 27^\circ \approx 0,891$$

$$|AC| = \frac{h}{\cos 27^\circ} \approx \frac{4}{0,891} \approx 4,48933 \approx 4,5$$

$$|AC| \approx 4,5 \text{ cm}$$

$$\frac{h}{|CB|} = \cos 33^\circ, \text{ odczytujemy z tablic } \cos 33^\circ \approx 0,8387$$

$$|CB| = \frac{h}{\cos 33^\circ} \approx \frac{4}{0,8387} \approx 4,7693 \approx 4,8$$

$$|CB| \approx 4,8 \text{ cm}$$

Obwód trójkąta jest sumą długości jego boków: $O = |AB| + |CB| + |AC|$

$$O \approx 4,6 + 4,8 + 4,5 = 13,9$$

$$O \approx 13,9 \text{ cm}$$

Odpowiedź:

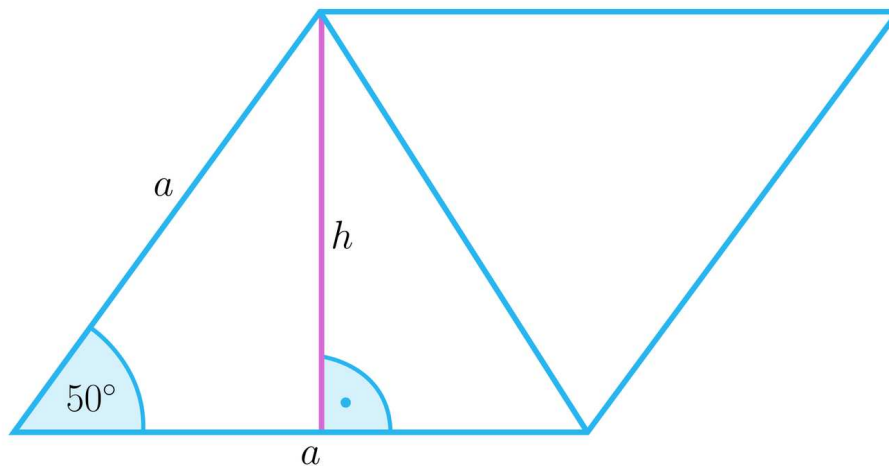
Pole trójkąta wynosi w przybliżeniu $9,2 \text{ cm}^2$ a jego obwód około $13,9 \text{ cm}$.

Przykład 2

W rombie dane są: bok długości 10 cm i kąt ostry 50° . Obliczymy długości przekątnych i pole rombu. Wynik podamy z dokładnością do $0,01 \text{ cm}$.

Przypomnijmy:

Romb jest czworokątem o wszystkich bokach równych, jest szczególnym przypadkiem równoległoboku. Przeciwległe boki rombu są równoległe, przekątne dzielą się na połowy i są wzajemnie prostopadłe; są one równocześnie dwusiecznymi kątów.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

h – wysokość rombu,

a – długość boku rombu, $a = 10 \text{ cm}$.

Do wyznaczenia pola rombu skorzystamy ze wzoru:

$$P = a \cdot h$$

Aby wyliczyć pole rombu musimy wyznaczyć jego wysokość h .

Wysokość jest prostopadła do boku a , możemy więc skorzystać z funkcji sinus.

$$\frac{h}{a} = \sin 50^\circ, \text{ odczytujemy z tablic: } \sin 50^\circ \approx 0,7660$$

$$\frac{h}{a} \approx 0,7660, \text{ zatem: } h \approx 10 \cdot 0,7660 = 7,66$$

$$h \approx 7,66 \text{ cm}$$

Podstawimy wyliczone wartości „ a ” i „ h ” do wzoru $P = a \cdot h$:

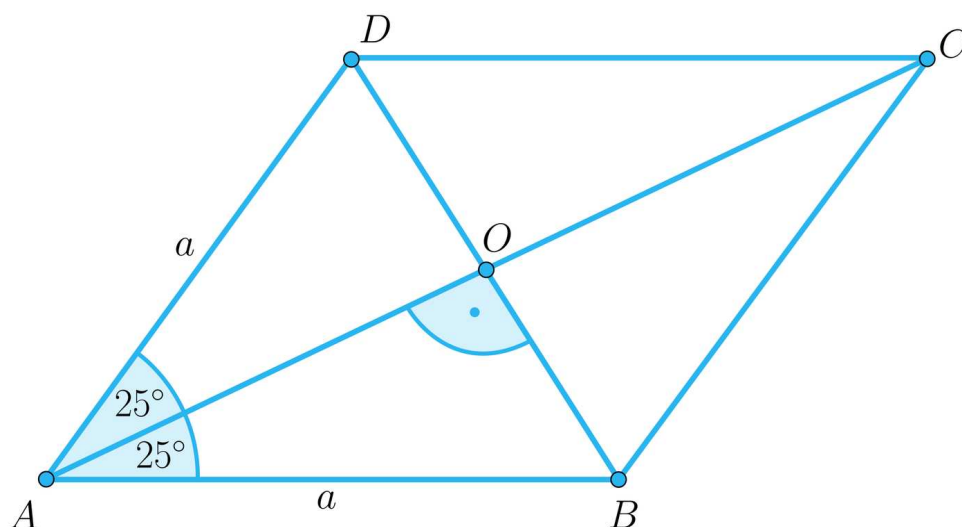
$$P = a \cdot h \approx 10 \cdot 7,66 = 76,6$$

$$P \approx 76,60 \text{ cm}^2$$

Obliczymy teraz długości przekątnych rombu.

W rombie:

1. przekątne dzielą się na połowy i są wzajemnie prostopadłe;
2. przekątne są dwusiecznymi kątów.



Przyjmijmy oznaczenia:

$|AC| = d$ - długość dłuższej przekątnej rombu

$|DB| = e$ - długość krótszej przekątnej rombu

Trójkąt AOB jest trójkątem prostokątnym.

Długości przyprostokątnych tego trójkąta:

$$|AO| = \frac{1}{2} \cdot d \text{ i } |BO| = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$\frac{|AO|}{|AB|} = \cos 25^\circ \text{ i } \cos 25^\circ \approx 0,9063 \text{ (odczytane z tablic)}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot d}{a} = \cos 25^\circ \text{ zatem: } \frac{\frac{1}{2} \cdot d}{10} \approx 0,9063, \text{ co daje: } \frac{1}{2} \cdot d \approx 0,9063 \cdot 10$$

W ostateczności: $d \approx 20 \cdot 0,9063 = 18,126 \approx 18,13$

$$d \approx 18,13 \text{ cm}$$

$$\frac{|BO|}{|AB|} = \sin 25^\circ \text{ i } \sin 25^\circ \approx 0,4226$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot e}{a} = \sin 25^\circ \text{ zatem } \frac{\frac{1}{2} \cdot e}{10} \approx 0,4226, \text{ co daje: } e \approx 20 \cdot 0,4226 = 8,452 \approx 8,45$$

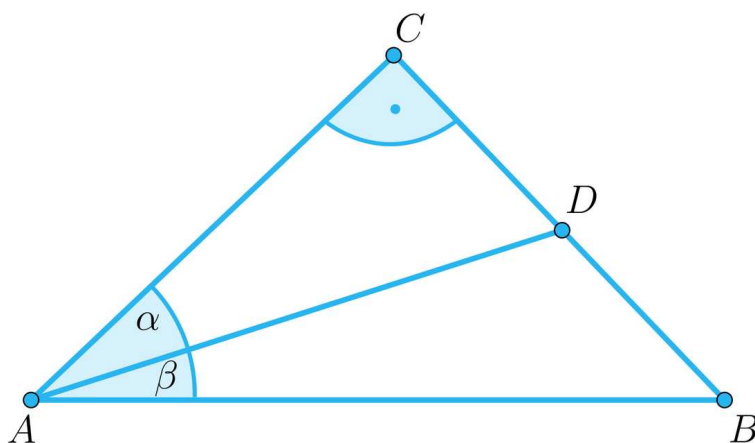
$$e \approx 8,45 \text{ cm}$$

Odpowiedź:

Pole **rombu** wynosi około $76,60 \text{ cm}^2$. Długości przekątnych są w przybliżeniu równe: $18,13 \text{ cm}$ oraz $8,45 \text{ cm}$

Przykład 3

W równoramiennym trójkącie prostokątnym ABC : $|AC| = |CB| = a = 6 \text{ cm}$. Obliczymy miary kątów, na jakie dzieli kąt CAB środkowa poprowadzona z wierzchołka A . Wynik podamy z dokładnością do 1° .



Trójkąt ABC jest równoramienny i prostokątny, więc $|\angle CAB| = |\angle ABC| = 45^\circ$

$$|AC| = |CB| = a = 6 \text{ cm}$$

$$|BD| = |DC| = \frac{a}{2} = 3 \text{ cm, bo } AD \text{ jest środkową.}$$

Trójkąt ACD jest prostokątny, więc możemy zastosować funkcję tangens:

$$\frac{|DC|}{|AC|} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ zatem } \frac{\frac{a}{2}}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ stąd } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\alpha \approx 26^\circ 36' \approx 27^\circ, \text{ bo } \operatorname{tg} 26^\circ 36' \approx 0,5008$$

$$\alpha \approx 27^\circ$$

$$\beta \approx 45^\circ - \alpha = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$$

$$\beta \approx 18^\circ$$

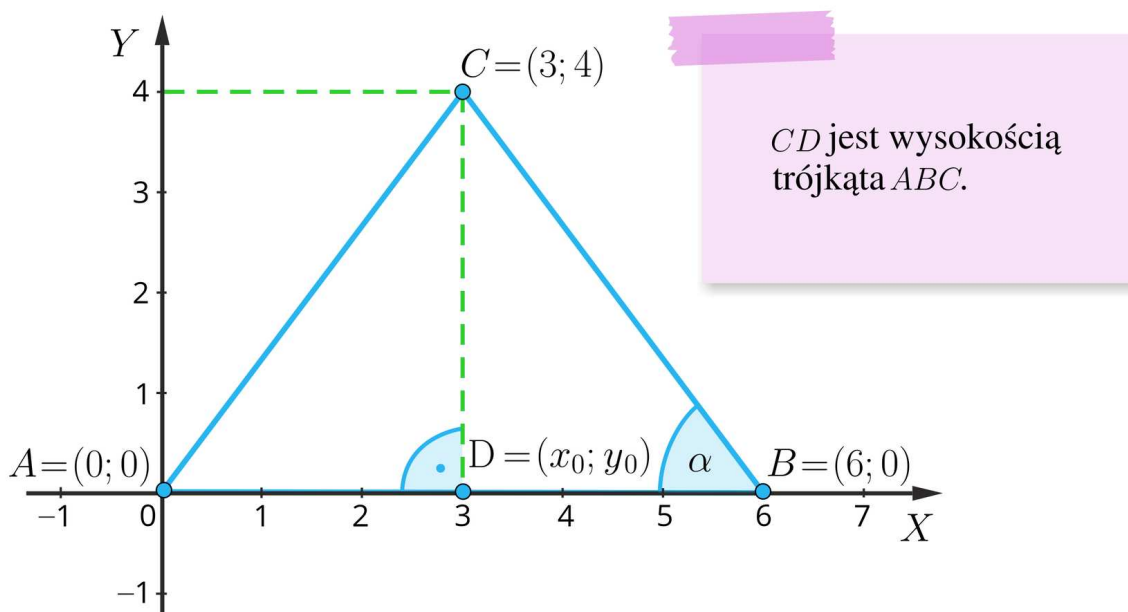
Odpowiedź:

Środkowa poprowadzona z wierzchołka A dzieli kąt $\angle CAB$ na kąty: $\alpha \approx 27^\circ$ i $\beta \approx 18^\circ$.

Przykład 4

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (3, 4)$. Wyznamy kąty trójkąta. Wynik podamy z dokładnością do 1° .

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z rysunku: punkt D ma współrzędne: $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ więc trójkąt ABC jest równoramienny:

- $|AC| = |BC|$
- $|\angle CAB| = |\angle ABC|$

Rozważmy trójkąt BDC :

$$|BD| = 3, |CD| = 4$$

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \operatorname{tg} \alpha \text{ i } \frac{4}{3} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \approx 1,3333 \text{ zatem } \alpha \approx 53^\circ$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180° :

$$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ \text{ stąd } \beta = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\beta \approx 180^\circ - 2 \cdot 53^\circ = 180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$$

Odpowiedź:

Kąty mają następujące miary: $53^\circ, 53^\circ, 74^\circ$.

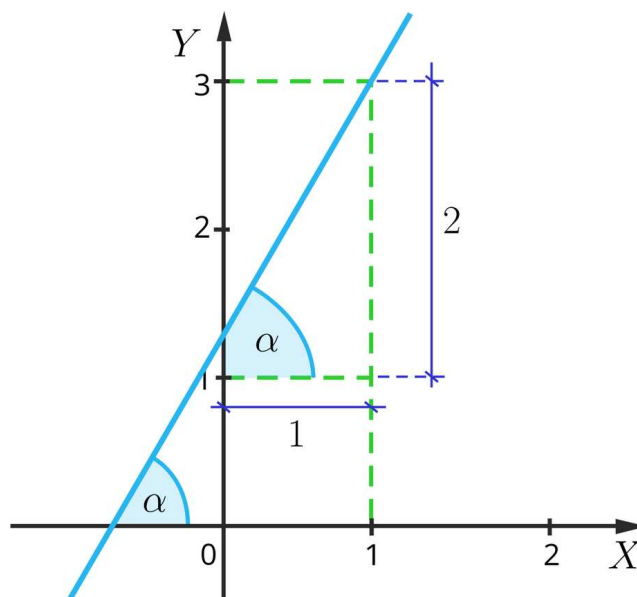
Przykład 5

Dana jest prosta o równaniu $y = 2x + 1$. Wyznacz kąt nachylenia tej prostej do osi X . Wynik podaj z dokładnością do 1° .

Dwa różne punkty jednoznacznie wyznaczają prostą, zatem aby narysować prostą musimy znać współrzędne dwóch punktów leżących na prostej $y = 2x + 1$.

$$\text{dla } x = 0, y = 2 \cdot 0 + 1 = 1, A = (0, 1)$$

$$\text{dla } x = 1, y = 2 \cdot 1 + 1 = 3, B = (1, 3)$$



Z rysunku wynika, że:

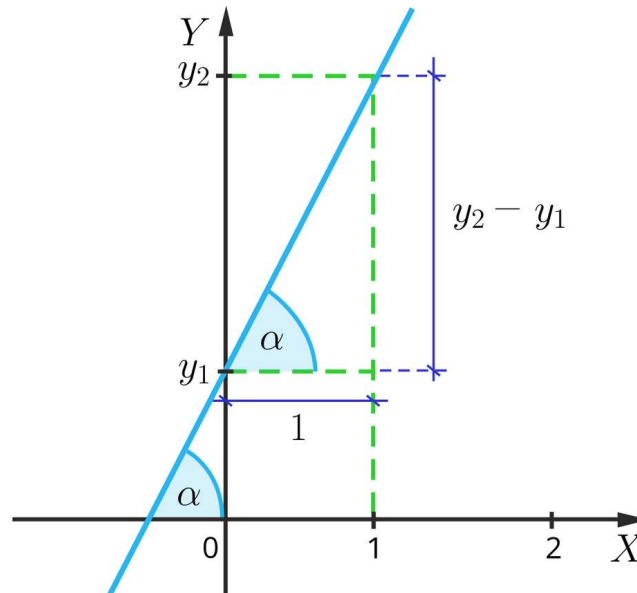
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1} = 2 \text{ stąd } \alpha \approx 63^\circ 24' \approx 63^\circ$$

Odpowiedź:

Prosta $y = 2x + 1$ jest nachylona do osi X pod kątem ok. 63° .

Ważne!

Zauważ, że dla dowolnej prostej $y = ax + b$, $a = \operatorname{tg} \alpha$:



$$y = a \cdot x + b$$

Wyznamy rzędną punktu o odciętej 0:

$$y_1 = a \cdot 0 + b = b$$

Wyznamy rzędną punktu o odciętej 1:

$$y_2 = a \cdot 1 + b = a + b$$

Z rysunku wynika, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{1 - 0} = \frac{(a+b) - b}{1} = a + b - b = a$$

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$ jest tangensem kąta nachylenia tej prostej do osi X :

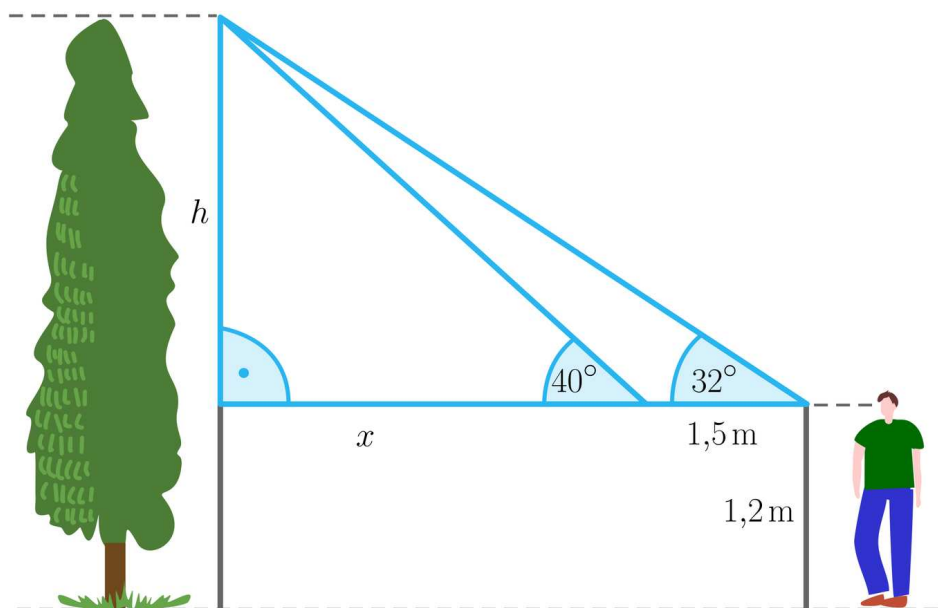
$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Przykład 6

Jacek widzi czubek drzewa pod kątem 32° . Po przejściu 1,5 m w stronę drzewa, jego czubek widzi pod kątem 40° . Obliczymy jaka jest wysokość drzewa, jeśli oczy Jacka są na

wysokości 1,2 m. Wynik podamy z dokładnością do 1 cm.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Korzystamy z definicji tangensa w trójkącie prostokątnym:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx \frac{h}{0,8391}$$

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{h}{x+1,5}$$

Odczytujemy z tablic: $\operatorname{tg} 32^\circ \approx 0,6249$ i $\operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8391$.

$$0,6249 \cdot (x + 1,5) = h$$

$$0,6249x + 0,93735 = h$$

$$0,6249 \cdot \frac{h}{0,8391} + 0,93735 = h \mid \cdot 0,8391$$

$$0,6249h + 0,786530385 = 0,8391h$$

$$0,786530385 = 0,2142h \mid : 0,2142$$

$$h \approx 3,67 \text{ m}$$

Odpowiedź:

Wysokość drzewa wynosi około 487 cm.

Przykład 7

Wyznamy miarę kąta ostrego α , jeśli: $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4 - \operatorname{tg} \alpha$.

Rozwiązanie:

$$\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4 - \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 4 - \operatorname{tg} \alpha$$

$$3 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 4 - \operatorname{tg} \alpha$$

$$4 \operatorname{tg} \alpha = 5 \quad | : 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4} = 1,25$$

W tablicach wartości funkcji trygonometrycznych odszukujemy kąt, dla którego wartość tangensa jest najbliższa liczbie 1,25.

Zatem: $\alpha \approx 51^\circ$.

Odpowiedź:

Kąt α ma miarę około 51° .

Słownik

romb

czworokąt o wszystkich bokach równych, jest szczególnym przypadkiem równoległoboku; przeciwległe boki rombu są równoległe, przekątne dzielą się na połowy i są wzajemnie prostopadłe; są one równocześnie dwusiecznymi kątów

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą zastosowanie przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dhh8mzMlG>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych.

Polecenie 2

W równoramiennym trójkącie prostokątnym przyprostokątna ma długość $a = 8$. Oblicz długości odcinków, na jakie dzieli tę przyprostokątną dwusieczna przeciwległego kąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.

Polecenie 3

W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 16 cm, a pole trójkąta równa się 40 cm^2 . Oblicz miary kątów tego trójkąta. Wynik podaj z dokładnością do 1° .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

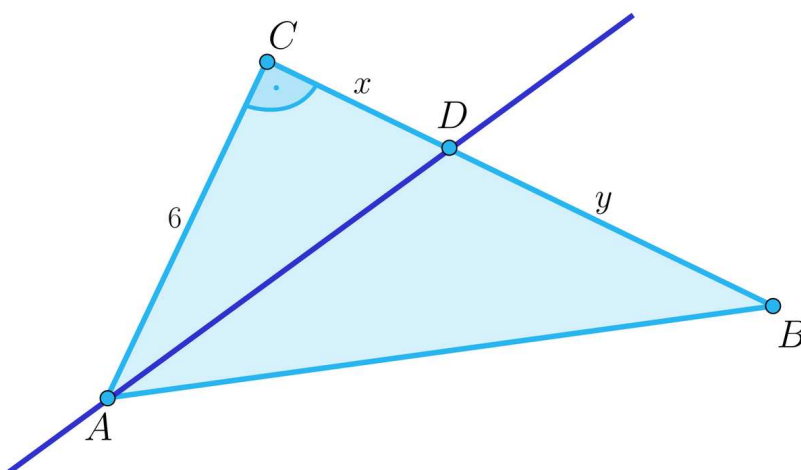


Ćwiczenie 6



W trójkącie prostokątnym ABC (zobacz rysunek poniżej), przyprostokątna AC ma długość 6, a kąt ABC ma miarę 36° .

Z wierzchołka A poprowadzono dwusieczną kąta BAC .



Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8

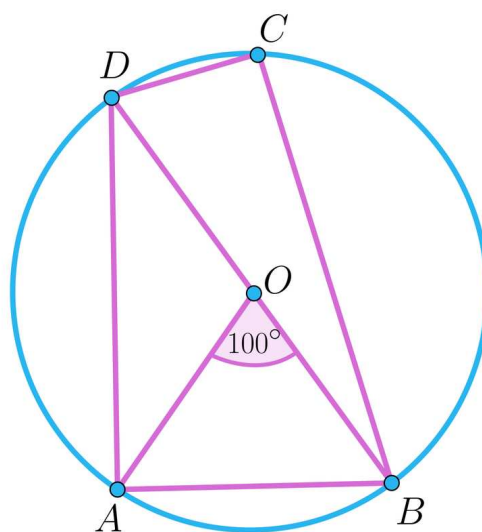


Wyznacz miary kątów w trójkącie prostokątnym, jeśli tangens jednego z nich 3 razy większy od sinusa tego kąta.

Ćwiczenie 9



Oblicz pole czworokąta $ABCD$, jeśli promień okręgu opisanego na tym czworokącie ma długość 6. Przyjmij, że kąt AOB ma miarę 100° , gdzie O - środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, a trójkąt ABC jest równoramienny. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.



Ćwiczenie 10



Na szczycie pewnego wzniesienia wybudowano zamek. Szczyt wieży zamku widać z pewnego punktu pod kątem 52° , a szczyt wzniesienia pod kątem 48° . Jaka jest wysokość wzniesienia, jeśli wysokość wieży zamku wynosi 24 m. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.

Ćwiczenie 11



Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- 3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- 11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora
- oblicza miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość
- wykorzystuje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
4. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
5. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
6. Uczniowie rozwiązują zadania znajdujące się pod animacją.
7. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Trójkąty i ich własności](#)
- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może zaproponować chętnym uczniom przygotowanie prezentacji opisującej metodę wyznaczenia odległości Ziemi od Słońca. Materiały zawarte w multimedium uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.