Obliczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym

Obliczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym

Źródło: Paul Bergmeir, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wzór to symboliczny sposób wyrażania informacji. Wzór matematyczny najczęściej jest zapisany z użyciem wyrażenia algebraicznego i ma charakter algorytmiczny.

Wzory pomagają opisywać świat rzeczywisty za pomocą modeli matematycznych i są pomocne przy tworzeniu przybliżonych rozwiązań problemów z kontekstem realistycznym.

W tym materiale pokażemy, jak wykorzystać wzór ogólny ciągu do wyznaczania wyrazów tego ciągu. I odwrotnie – mając dane niektóre wyrazy ciągu, wyznaczymy wzór tego ciągu.

Twoje cele

- Wyznaczysz dany wyraz ciągu, korzystając ze wzoru ogólnego lub sumy kolejnych początkowych wyrazów ciągu.
- Wyznaczysz wzór ogólny ciągu, mając dane niektóre wyrazy ciągu.
- Określisz własności ciągu, na podstawie jego wyrazów.

Przeczytaj

Jednym ze sposobów określenia ciągu jest podanie **wzoru na n–ty wyraz** tego ciągu. Wzór ten nazywamy też wzorem **ogólnym ciągu**. Na podstawie wzoru ogólnego można podać wiele własności ciągu i określić dowolny jego wyraz.

Uwaga!

W tym materiale będziemy zakładać, że dany ciąg liczbowy określony jest dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 1

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = n \cdot 2^{n-1}$. Obliczymy wyrazy a_1, a_{10}, a_{n+1}.

Do wzoru ciągu w miejsce n podstawiamy kolejno: 1, 10, $n+1$.

$a_1 = 1 \cdot 2^{1-1} = 1$

$a_{10} = 10 \cdot 2^{10-1} = 10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120$

$a_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1-1} = n \cdot 2^n + 2^n$

Przykład 2

Wyznaczmy te wyrazy ciągu (b_n) określonego wzorem ogólnym $b_n = n^2(n-11) + 36(n-1)$, które są równe 0.

Przekształcamy wzór ogólny ciągu, wykonując wskazane działania.

$b_n = n^2(n-11) + 36(n-1)$

$b_n = n^3 - 11n^2 + 36n - 36$

Chcemy rozłożyć na czynniki wyrażenie po prawej stronie znaku równości. Zapisujemy więc prawą stronę równości tak, aby można było pogrupować odpowiednio wyrazy i wyłączyć wspólny czynnik przed nawias.

$b_n = n^3 - 9n^2 - 2n^2 + 18n + 18n - 36$

$b_n = \left(n^3 - 2n^2\right) - \left(9n^2 - 18n\right) + (18n - 36)$

$b_n = n^2(n-2) - 9n(n-2) + 18(n-2)$

$b_n = (n-2)\left(n^2 - 9n + 18\right)$

Pozostaje jeszcze rozłożyć na czynniki wyrażenie w nawiasie.

$b_n = (n-2)\left(n^2 - 6n - 3n + 18\right)$

$b_n = (n-2)[n(n-6) - 3(n-6)]$

$b_n = (n-2)(n-3)(n-6)$

Szukamy wyrazów ciągu, które są równe 0.

$0 = (n-2)(n-3)(n-6)$

$n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

$n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3$

$n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$

Wszystkie otrzymane liczby są naturalne, zatem równe 0 są wyrazy b_2, b_3, b_6.

Przykład 3

Określimy, ile wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{5n-10}{n}$ to liczby całkowite.

Przekształcamy wzór ciągu tak, aby wyrażenie po prawej stronie zapisać w postaci sumy liczby całkowitej i ułamka algebraicznego.

$a_n = \frac{5n-10}{n} = \frac{5n}{n} - \frac{10}{n}$

$a_n = 5 - \frac{10}{n}$

Aby wyrażenie $5 - \frac{10}{n}$ przyjmowało wartości całkowite, liczba n musi być dzielnikiem liczby 10.

Zatem $n \in \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$. Cztery wyrazy ciągu to liczby całkowite.

Przykład 4

Znajdziemy najmniejszy wyraz ciągu (b_n) określonego wzorem ogólnym $b_n = n^2 - 17n - 29$.

Wykres ciągu (b_n) składa się z punktów leżących na paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 17x - 29$. Ramiona paraboli skierowane są ku górze, więc najmniejsza wartość funkcji f znajduje się w wierzchołku paraboli.

Znajdujemy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

$x_w = \frac{17}{2} = 8,5$

Interesujące nas argumenty muszą być liczbami całkowitymi. Zatem $x = 8$ lub $x = 9$.

Czyli $n = 8$ lub $n = 9$. Obliczamy i porównujemy wartości wyrazów b_8 i b_9.

$b_8 = 8^2 - 17 \cdot 8 - 29 = 64 - 136 - 29 = -101$

$b_9 = 9^2 - 17 \cdot 9 - 29 = 81 - 153 - 29 = -101$

$b_8 = b_9$

Dwa najmniejsze wyrazy ciągu to b_8 i b_9.

Nie zawsze znamy wzór lub regułę określającą ciąg. Mając danych tylko kilka początkowych wyrazów ciągu, trzeba samodzielnie odkryć ogólną zasadę. W prostych przypadkach odkrycie takiej reguły nie przedstawia większych trudności. Jednak nie zawsze tak jest.

Przykład 5

Kolejne początkowe wyrazy ciągu (a_n) to: $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots$ Wykażemy, że liczba $a_9 + a_{99}$ jest większa od 100.

Znajdziemy najpierw wyraz ogólny ciągu.

Zauważmy, że liczniki ułamków to kwadraty kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Mianowniki to kolejne liczby naturalne, począwszy od 2. Zatem:

$a_1 = \frac{1^2}{1+1}$

$a_2 = \frac{2^2}{2+1}$

$a_3 = \frac{3^2}{3+1}$

$a_4 = \frac{4^2}{4+1}$

$\ldots$

$\ldots$

$a_n = \frac{n^2}{n+1}$

Obliczamy sumę $a_9 + a_{99}$.

$a_9 + a_{99} = \frac{9^2}{9+1} + \frac{99^2}{99+1} = \frac{81}{10} + \frac{9801}{100}$

$a_9 + a_{99} = \frac{10611}{100} = 106,11 > 100$

Definicja: Suma ciągu

Sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) nazywamy wyrażenie

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 6

Obliczymy wyrazy a_1 i a_6 ciągu (a_n), w którym suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem

$S_n = (n+1)(n-2)$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu.

$a_1 = S_1 = 2 \cdot (-1) = -2$

Zauważmy, że

$a_n = S_n - S_{n-1}$

Obliczamy szósty wyraz ciągu.

$a_6 = S_6 - S_5$

$a_6 = 7 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 28 - 18 = 10$

Słownik

suma ciągu

sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) nazywamy wyrażenie

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zamieszczone w prezentacji multimedialnej. Staraj się najpierw samodzielnie znaleźć rozwiązania, a następnie porównaj z zamieszczonymi.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRCxnNhNr

Polecenie 2

Sprawdź, którym wyrazem ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{n^2-2}{n^2+2}$ jest $\frac{49}{51}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że każdy wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = 2(n-1)^2 - (n+1)(n-4)$ jest dodatni.

Ćwiczenie 8

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) wiedząc, że $a_{n+1} + a_{n+2} = 8n + 6$ i $a_{n+1} - a_{n+2} = -4$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza dany wyraz ciągu, korzystając ze wzoru ogólnego lub jego sumy
- oblicza wzór ogólny ciągu, mając dane niektóre wyrazy ciągu
- określa własności ciągu, na podstawie jego wyrazów
- prowadzi proste rozumowania, również oparte na analogii, rozwiązując problemy z teorii ciągów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- papierowa wstęga
- bezludna wyspa

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracując w parach, metodą papierowej wstęgi, powtarzają wiadomości na temat ciągów (z kartonu wycinają długi pasek – może być skręcony i na tym pasku na przemian zapisują pozyskane wcześniej informacje na temat ciągów).
2. Po skończonej pracy wymienią się wstęgami z sąsiadami z sąsiedniej ławki. Odczytują zapisane na wstędze sąsiadów wiadomości, ewentualnie dopisują to, czego tam nie ma i wstęgę podają dalej. W ten sposób wszystkie pary uczniów przypomną sobie pożądane wiadomości.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach (3 – 4 osobowych) metodą bezludnej wyspy – uczniowie wyobrażają sobie, że wylądowali na bezludnej wyspie, więc muszą sami sobie radzić. Ich zadaniem jest rozwiązanie wszystkich ćwiczeń interaktywnych w określonym czasie (np. nim na wyspie zapadnie noc).
2. Są na wyspie sami, więc nie wolno im zwracać się do nikogo o pomoc. Mają tylko do dyspozycji materiał z sekcji „Przeczytaj” i prezentację multimedialną. Nie wolno przy tym, przed rozwiązaniem zadania sprawdzać odpowiedzi. Każde źle rozwiązane zadanie, to dodatkowa doba na wyspie (czyli rozwiązanie w domu dodatkowych zadań). Grupa, która jako pierwsza bezbłędnie rozwiąże wszystkie ćwiczenia, odpływa z wyspy (czyli otrzymuje stopień bardzo dobry).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Liderzy grup opowiadają o sposobach pracy grup, napotkanych trudnościach, dobrych pomysłach.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par. Wyjaśnia wątpliwości.

Praca domowa:

Grupy, które nie rozwiązały poprawnie któregoś z ćwiczeń interaktywnych mają za zadanie ułożenie 2 zadań podobnego typu i zapisanie co najmniej 2 sposobów ich rozwiązania.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być materiałem powtórzeniowym przed cyklem zajęć poświęconych ciągowi arytmetycznemu (lub geometrycznemu).