

Wyznaczanie okresu i częstotliwości drgań wahadła matematycznego i ciężarka na sprężynie

# Wyznaczanie okresu i częstotliwości drgań wahadła matematycznego i ciężarka na sprężynie

---

Podczas pracy wiertarki udarowej drgania tego narzędzia są wyraźnie wyczuwalne, a czas trwania jednego drgnienia to ułamek sekundy. Czy można zatem zmierzyć ten czas, mając do dyspozycji tylko stoper ręczny? Czy niezbędna jest tu specjalistyczna aparatura (fotokomórka)?



Mimo iż wahadło matematyczne jest modelem czysto teoretycznym, to istnieją na świecie konstrukcje, których ruch można opisać za pomocą takiego właśnie modelu. Przykładem jest wahadło w Katedrze Metropolitalnej miasta Meksyk

Źródło: Diego Delso, dostępny w internecie: [delso.photo](http://delso.photo), licencja: CC BY-SA 4.0.

**Przed przystąpieniem do zapoznania się z tematem, należy znać poniższe zagadnienia**

- definicję ruchu drgającego;
- pojęcia i wielkości opisujące ruch drgający, takie jak: położenie równowagi, wychylenie z położenia równowagi, okres i częstotliwość drgań, amplituda drgań;
- przykłady ciał wykonujących ruch drgający;

- opis ruchu ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego;
- sposób odczytu okresu drgań z zależności wychylenia od czasu  $x(t)$ ;
- jak obliczyć częstotliwość drgań, znając okres lub odwrotnie.

### Nauczysz się

- mierzyć okres drgań wahadła matematycznego i ciężarka na sprężynie;
- ustalać czynniki wpływające na niepewność pomiaru oraz sposoby zmniejszania tej niepewności;
- badać, od jakich wielkości fizycznych zależy, a od jakich nie zależy okres drgań [wahadła matematycznego](#) i ciężarka na sprężynie.

## Doświadczenie 1

Pomiar okresu drgań wahadła matematycznego i ocena niepewności tego pomiaru.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- stalowa lub ołowiana kulka z otworem lub haczykiem do zamocowania nici;
- mocna, nierozciągliwa nić;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

#### Część I

1. Zamocuj kulkę na nici i zawieś na statywie. Istotne jest, aby punkt zawieszenia był nieruchomy.
2. Ustal długość nici na około 100 cm.
3. Przed rozpoczęciem właściwych pomiarów poćwicz wprawianie wahadła w ruch. Polega to na odchyleniu kulki od pionu i puszczeniu jej swobodnie. Kąt odchylenia nie powinien być większy niż  $10^\circ$ . Ważne jest, aby kulkę tylko puścić – czyli nie pociągnąć, nie popchnąć, nie obrócić. Wahania kulki powinny odbywać się w jednej płaszczyźnie – nić nie może zakreślać elipsy.
4. Odchyl wahadło od pionu i zmierz czas trwania jednego wahnięcia – włącz stoper w momencie puszczenia kulki i wyłącz, kiedy wróci do miejsca startu. Czynność tę powtórz kilka razy – mogą to zrobić różne osoby.
5. Zanotuj otrzymane wyniki.

#### Część II

1. Zmierz czas trwania 10 wahnięć – włącz stoper w momencie rozpoczęcia drgań (puszczenia kulki i wyłącz go dopiero wtedy, gdy kulka wykona 10 pełnych wahnięć (to znaczy po raz dziesiąty znajdzie się punkcie startu).

2. Oblicz okres wahadła – podziel zmierzony czas przez 10 i zaokrąglij wynik do dwóch miejsc po przecinku.
3. Czynności 1 i 2 powtórz kilka razy – mogą to zrobić różne osoby.
4. Zanotuj otrzymane wyniki.

## Podsumowanie

---

Można zauważyć, że otrzymane wyniki pomiarów w obu częściach znacznie różnią się od siebie. Oznacza to, że pomiar pojedynczego okresu drgań obarczony jest dużą niepewnością pomiaru. Przypomnijmy, że czas reakcji człowieka wynosi 0,1 s.

Ponieważ stoper był włączany i wyłączany ręcznie, to sumaryczna niepewność pomiaru wynosi 0,2 s. Jeśli mierzona przez nas wielkość miała na przykład wartość 0,92 s, to oznacza, że pomiar był bardzo niedokładny, gdyż wynosił ponad 20%.

Pomiar czasu trwania 10 wahań zmniejszył znacząco niepewność pomiaru okresu – wyniki otrzymane w części drugiej nie różnią się o więcej niż 0,02 s. Oznacza to, że okres został zmierzony z dokładnością do 2%. Domyślasz się, że zwiększenie liczby wahań do 20 poprawiłoby dokładność pomiaru dwukrotnie.

## Zapamiętaj!

Wyznaczanie okresu drgań wahadła matematycznego polega na zmierzeniu czasu trwania kilku lub kilkudziesięciu wahań i podzieleniu wyniku tego pomiaru przez liczbę wahań.

$$T = \frac{t_n}{n}$$

gdzie:  $n$  – liczba wahań;  $t_n$  – czas trwania  $n$  wahań.

Aby wyznaczyć częstotliwość drgań wahadła, należy zmierzyć czas trwania kilku lub kilkudziesięciu wahań i podzieleniu liczby drgań przez zmierzony czas.

$$f = \frac{n}{t_n}$$

## Doświadczenie 2

Badanie zależności okresu drgań wahadła matematycznego od amplitudy drgań.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- stalowa lub ołowiana kulka z otworem lub haczykiem do zamocowania nici;
- mocna, nierozciągliwa nić;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

1. Zamocuj kulkę na nici i zawieś na statywie. Istotne jest, aby punkt zawieszenia był nieruchomy.
2. Ustal długość nici na około 100 cm.
3. Przed rozpoczęciem właściwych pomiarów poćwicz wprawianie wahadła w ruch. Polega to na odchyleniu kulki od pionu i puszczeniu jej swobodnie. Ważne jest, aby kulkę tylko puścić – czyli nie pociągnąć, nie popchnąć, nie obrócić. Wahania kulki powinny odbywać się w jednej płaszczyźnie – nić nie może zakreślać elipsy.
4. Odchyl wahadło od pionu o bardzo niewielki kąt (kulka powinna być przesunięta około 5 cm od położenia równowagi) i zmierz okres drgań wahadła, zgodnie z zasadami poznanymi w poprzednim doświadczeniu.
5. Pomiar opisany w punkcie 4 wykonaj trzy razy.
6. Oblicz średnią arytmetyczną wyznaczonego okresu drgań, wynik zaokrąglaj do 2 miejsc po przecinku i zanotuj:  $T_1 = \dots$
7. Odchyl wahadło od pionu o dwa razy większy kąt (około 10 cm od położenia równowagi) i ponownie zmierz okres drgań wahadła.
8. Pomiar 7 powtórz trzy razy, oblicz średnią wartość, zaokrąglaj wynik do 2 miejsc po przecinku i zanotuj wynik:  $T_2 = \dots$
9. Wyznacz okres drgań wahadła dla jeszcze większego kąta odchylenia (około 15 cm od położenia równowagi):  $T_3 = \dots$

## Podsumowanie

---

Jeśli poprawnie wykonałeś doświadczenie, to zmierzone okresy drgań wahadła dla różnych kątów odchylenia ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ) nie różnią się o więcej niż 0,02 s. Oznacza to, że są takie same w granicach niepewności pomiaru.

## Zapamiętaj!

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od amplitudy drgań. Tę właściwość wahadła nazywamy izochronizmem. Została ona odkryta przez Galileusza i ma zasadnicze znaczenie dla konstruktorów zegarów wahadłowych.

## Doświadczenie 3

Badanie zależności okresu drgań wahadła matematycznego od długości nici.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- stalowa lub ołowiana kulka z otworem lub haczykiem do zamocowania nici;
- mocna, nierozciągliwa nić;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

1. Zamocuj kulkę na nici i zawieś na statywie. Pamiętaj o zasadach dotyczących zawieszenia i uruchamiania wahadła, opisanych w poprzednich doświadczeniach.
2. Zmierz długość wiszącego wahadła – jest to odległość od punktu zawieszenia do środka kulki.
3. Wyznacz okres drgań wahadła zgodnie z zasadami ustalonymi w podsumowaniu pierwszego doświadczenia.
4. Zmień długość wahadła i powtórz pomiary wskazane w punktach 2 – 3.
5. Wykonaj pomiary dla czterech różnych długości wahadła. Długości staraj się dobrać tak, aby największa z nich była cztery razy większa od najmniejszej, na przykład 50 cm, 100 cm, 150 cm i 200 cm. Odchylenia z położenia równowagi dobieraj tak, aby nie przekraczały 10% długości nici za każdym razem.

### Podsumowanie

---

Pomiary jednoznacznie wskazują, że:

- okres drgań wahadła zależy od jego długości;
- większej długości odpowiada większa wartość okresu drgań;
- gdy długość wahadła wzrośnie cztery razy, to okres drgań wzrośnie dwa razy.

## Ćwiczenie 1

Na podstawie powyższych wniosków, ustal, ile razy należy zwiększyć długość wahadła, aby okres jego drgań wzrósł trzy razy. Wnioski zapisz w poniższym polu.

## Doświadczenie 4

Badanie zależności okresu drgań wahadła matematycznego od masy kulki.

Długości wahadeł zbudowanych z różnych kulek muszą być takie same.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- kilka kulek z otworem lub haczykiem do zamocowania nici. Kulki powinny być wykonane z różnych materiałów, ale mieć taką samą średnicę (na przykład drewniana, stalowa, ołowiana, szklana);
- mocna, nierozciągliwa nić;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

1. Zamocuj jedną z kulek na nici i zawieś na statywie. Pamiętaj o zasadach dotyczących zawieszenia i uruchamiania wahadła opisanych w pierwszym doświadczeniu.
2. Zmierz długość wiszącego wahadła – jest to odległość od punktu zawieszenia do środka kulki.
3. Wyznacz okres drgań wahadła zgodnie z zasadami ustalonymi we wnioskach z pierwszego doświadczenia.
4. Pomiar powtórz dla wszystkich kulek.

### Podsumowanie

---

Jeśli poprawnie wykonałeś doświadczenie, to zmierzone okresy drgań wahadła dla różnych kulek nie różnią się o więcej niż 0,02 s. Oznacza to, że są takie same w granicach niepewności pomiaru.

### Zapamiętaj!

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od masy wahadła.

## Doświadczenie 5

Wyznaczanie częstotliwości i okresu drgań ciężarka na sprężynie.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- sprężyna;
- ciężarek z haczykiem;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

1. Sprężynę zamocuj i zawieś na statywie. Sprężyna powinna zwisać swobodnie.
2. Na sprężynie zawieś ciężarek. Pociągnij go lekko pionowo w dół i puść swobodnie. Ciężarek powinien poruszać się po linii prostej, bez kołysania na boki i bez „podskakiwania”. Stanie się tak, gdy sprężyna jest długa, dość miękka, a amplituda drgań nie będzie zbyt duża. Puszczając ciężarek, należy uważać, aby nie popchnąć go w bok lub nie skrzywić.
3. Po tych wstępnych ćwiczeniach we wprowadzaniu ciężarka w ruch drgający przystąp do właściwych pomiarów.
4. Zmierz czas trwania 10 pełnych drgań ciężarka – włącz stoper w chwili rozpoczęcia ruchu ciężarka i wyłącz, gdy ciężarek po raz dziesiąty znajdzie się w najniższym położeniu.
5. Oblicz okres drgań, dzieląc otrzymany wynik pomiaru przez 10. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.
6. Oblicz częstotliwość drgań ciężarka, dzieląc liczbę 10 przez zmierzony czas trwania 10 wahań.

### Podsumowanie

---

Aby wyznaczyć częstotliwość drgań ciężarka na sprężynie, należy zmierzyć czas trwania kilku lub kilkadziesiątu drgań i podzieleniu liczby drgań przez zmierzony czas.

$$f = \frac{n}{t_n},$$

gdzie:  $n$  - liczba drgań;  $t_n$  - czas trwania  $n$  drgań.

Aby wyznaczyć okres drgań ciężarka na sprężynie, należy zmierzyć czas trwania kilku lub kilkudziesięciu drgań i podzielić zmierzony czas przez liczbę drgań.

$$T = \frac{t_n}{n}$$

## Doświadczenie 6

Badanie zależności okresu drgań ciężarka na sprężynie od masy ciężarka.

### Co będzie potrzebne

---

- stoper ręczny;
- statyw z wyposażeniem;
- sprężyna;
- kilka ciężarków o znanej masie. Dobrze jeśli ciężarki są z haczykami i mają jednakowe masy;
- linijka lub inna miarka do pomiaru długości.

### Instrukcja

---

1. Sprężynę zamocuj i zawieś na statywie.
2. Na sprężynie zawieś jeden ciężarek i wyznacz okres jego drgań zgodnie z uwagami i wnioskami z poprzedniego doświadczenia.
3. Na sprężynie zawieś dwa ciężarki jeden pod drugim albo ciężarek o innej masie i wyznacz okres ich drgań.
4. Pomiary powtórz kolejno dla trzech i czterech ciężarków.
5. Wyniki pomiarów zanotuj i przeanalizuj, po czym porównaj swoją analizę z Podsumowaniem poniżej.

### Podsumowanie

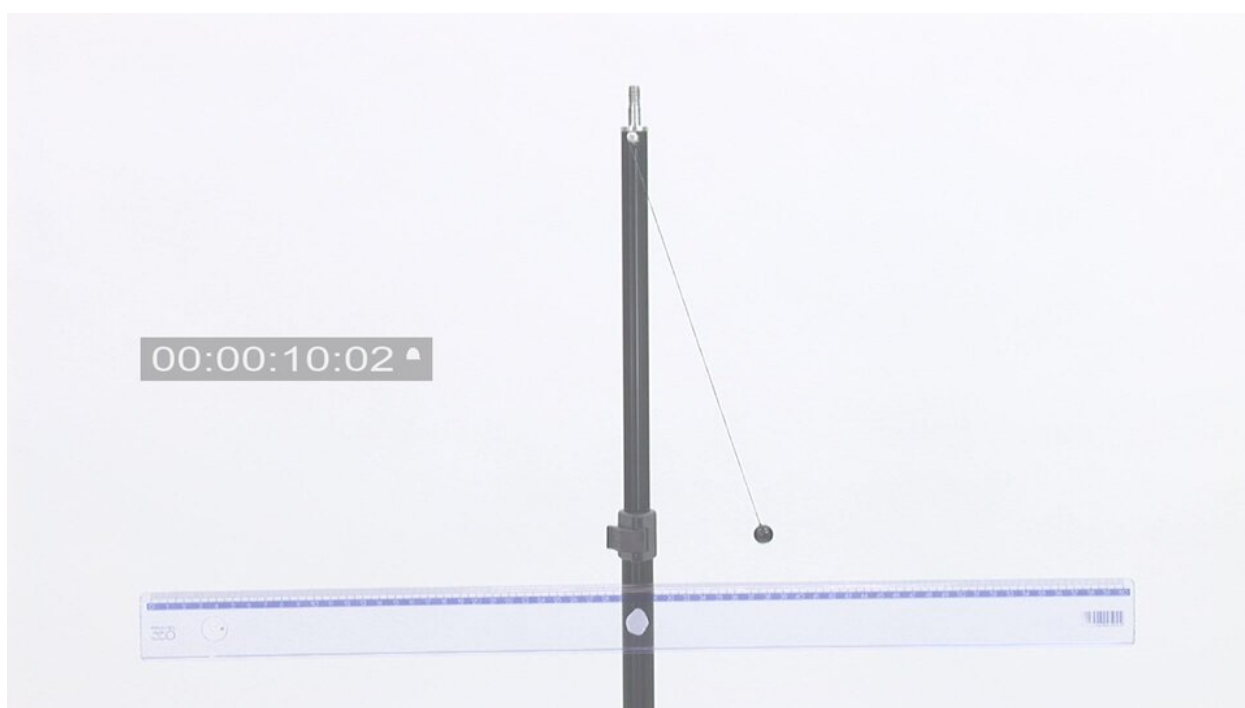
---

Pomiary wskazują, że:

- okres drgań ciężarka na sprężynie zależy od jego masy;
- większej masie odpowiada większa wartość okresu drgań;
- gdy masa ciężarków wzrośnie cztery razy, to okres drgań wzrośnie dwa razy (ten efekt jest możliwy do uzyskania, jeżeli masa sprężyny będzie znacznie mniejsza od masy zawieszzonego na niej ciężarka).

Jeśli nie masz możliwości wykonania opisanych wyżej doświadczeń, obejrzyj je na załączonym filmie. Film możesz też wykorzystać, jako „Instrukcję wykonania”.

## Trwa wczytywanie danych. .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RXApdcAinG3BE>

Doświadczenia z wahadłem matematycznym.

Źródło: Tomorrow Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Film dotyczący doświadczeń z wahadłem matematycznym.

---

## Podsumowanie

- Wyznaczanie okresu drgań wahadła matematycznego polega na zmierzeniu czasu trwania kilku lub kilkadziesiąt wahań i podzieleniu wyniku tego pomiaru przez liczbę wahań.

$$T = \frac{t_n}{n},$$

gdzie:  $n$  – liczba wahaniec;  $t_n$  – czas trwania  $n$  wahaniec.

- Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od amplitudy drgań. Tę właściwość wahadła nazywamy izochronizmem.
- Okres drgań wahadła matematycznego zależy od jego długości, przy czym:
  - większej długości odpowiada większa wartość okresu drgań,
  - gdy długość wahadła wzrośnie cztery razy, to okres drgań wzrośnie dwa razy.
- Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od masy wahadła.
- Aby wyznaczyć częstotliwość drgań ciężarka na sprężynie, należy zmierzyć czas trwania kilku lub kilkadziesiąt drgań i podzielić liczbę drgań przez zmierzony czas.

$$f = \frac{n}{t_n},$$

gdzie:  $n$  – liczba drgań;  $t_n$  – czas trwania  $n$  drgań.

- Aby wyznaczyć okres drgań ciężarka na sprężynie, należy zmierzyć czas trwania kilku lub kilkadziesiąt drgań i podzielić zmierzony czas przez liczbę drgań.
- $$T = \frac{t_n}{n}$$
- Okres drgań ciężarka na sprężynie zależy od jego masy, przy czym większej masie odpowiada większa wartość okresu drgań.

## Ćwiczenie 2

Wahadła zegarów w wyniku zmian temperatury wydłużają się lub skracają. W jaki sposób wydłużenie wahadła wpłynie na mierzony tym zegarem upływ czasu?

Odpowiedź zapisz w poniższym polu.

## Słownik

izochronizm

niezależność okresu drgań od amplitudy drgań.

wahadło matematyczne

inaczej wahadło proste, to wyidealizowane ciało o masie punktowej, zawieszone na cienkiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici.