



Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny

Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny. Ilustracja: związek między długościami boków trójkąta prostokątnego i promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny

Przeanalizuj przykład pokazujący, jak obliczyć długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym oraz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny. Poznaj też twierdzenie, w którym podany jest wzór na obliczenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny.

Przykład 1

W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych

$$|AC| = 16, |BC| = 30.$$

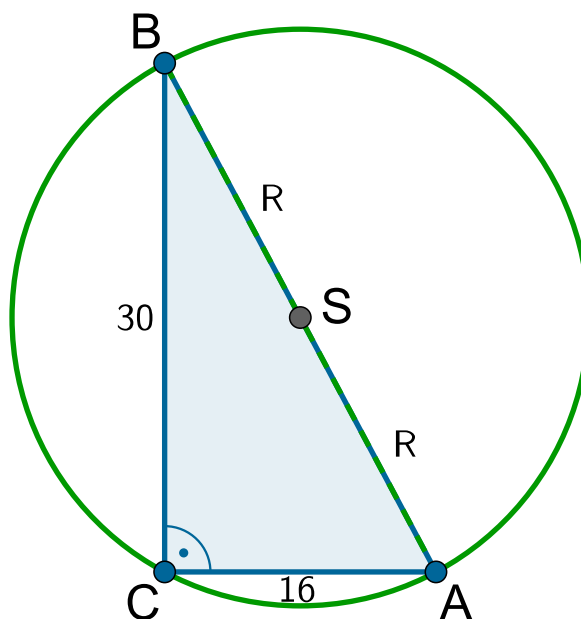
Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Ponieważ trójkąt jest prostokątny, to środek okręgu na nim opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej.

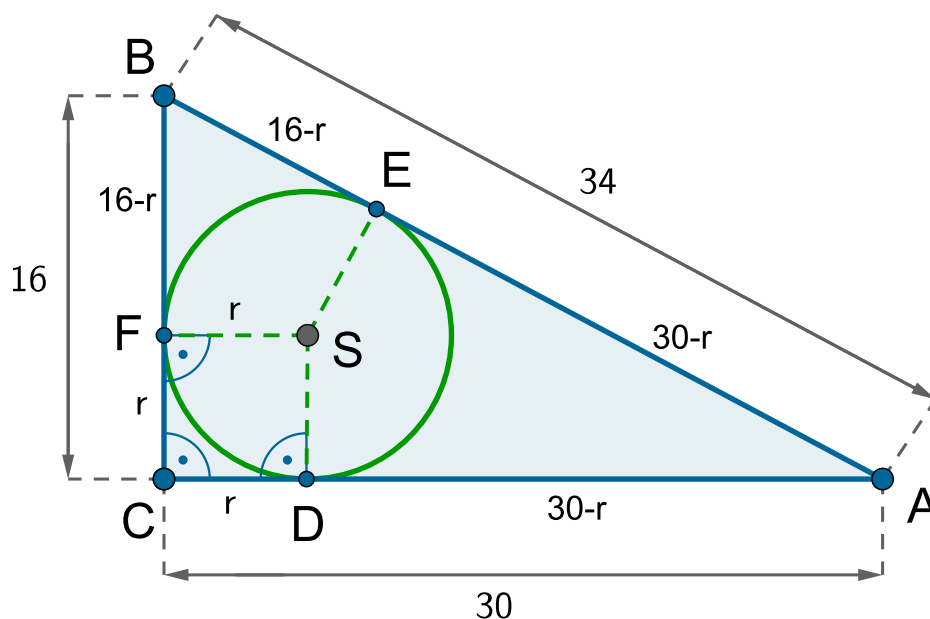
Z twierdzenia Pitagorasa

$$|AB|^2 = 16^2 + 30^2.$$

Po uwzględnieniu, że $|AB| > 0$, otrzymujemy $|AB| = 34$. Zatem promień R okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 17.



Niech S i r oznaczają odpowiednio środek i promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg ten jest styczny do przyprostokątnych AC i BC w punktach odpowiednio D i F , a do przeciwprostokątnej w punkcie E , jak na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że

$$|CD| = |CF|, |BE| = |BF|, |AD| = |AE|.$$

Czworokąt $SDCF$ jest kwadratem o boku r . Zatem

$$|CD| = |CF| = r$$

$$|BE| = |BF| = 16 - r.$$

Ponieważ

$$|AB| = |AE| + |BE|$$

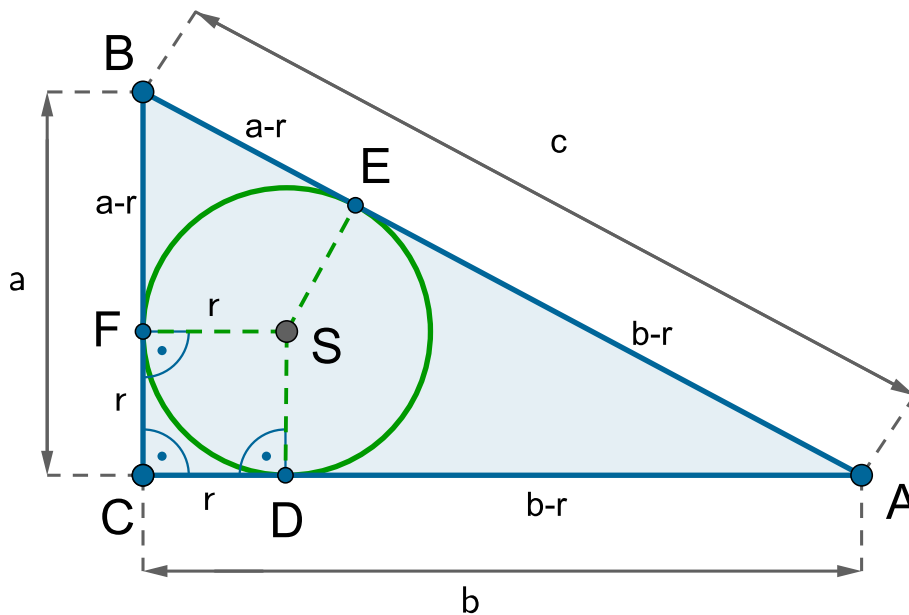
$$|AD| = |AE| = 30 - r.$$

to

$$16 - r + 30 - r = 34.$$

Stąd $r = 6$.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b i przeciwprostokątnej długości c , otrzymujemy związek między długościami boków trójkąta prostokątnego i promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$c = a - r + b - r.$$

Twierdzenie: Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c jest równy

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$