



Równania wymierne zapisane za pomocą sumy ułamków algebraicznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równania wymierne zapisane za pomocą sumy ułamków algebraicznych

Źródło: Stefan Wiegand, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Aby opisać zjawiska generujące dzisiejszy świat, wygodnie jest dysponować narzędziami, które ułatwiają te opisy. Do nich niewątpliwie należą równania. Dzięki równaniom wymiernym zapisanym za pomocą ułamków algebraicznych możemy rozwiązywać skomplikowane problemy z różnych dziedzin życia.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wymierne zapisane za pomocą sumy ułamków algebraicznych.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego zapisanego za pomocą sumy ułamków algebraicznych.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$) to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu $W(x)$, które nie są miejscami zerowymi wielomianu $P(x)$.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania **równania wymiernego** należy określić jego dziedzinę.

Dziedziną równia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Pokażemy przykłady rozwiązań równań wymiernych zapisanych za pomocą sumy ułamków algebraicznych.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = 0$.

Ustalimy najpierw dziedzinę równania.

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Lewa strona równania jest zapisana za pomocą sumy ułamków algebraicznych.

Sprowadzimy te ułamki do wspólnego mianownika.

$$\frac{3(x-1)+2x}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{3x-3+2x}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{5x-3}{x(x-1)} = 0$$

Ułamek równa się zero jeżeli licznik ułamka równa się zero.

$$5x - 3 = 0$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} \in D$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{3}{5}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie wymierne $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+4} = 2$.

Wyznamy dziedzinę równania.

$$x + 2 \neq 0 \text{ i } x + 4 \neq 0$$

$$x \neq -2 \text{ i } x \neq -4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$$

Sprowadzimy ułamki algebraiczne występujące z lewej strony równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{(x+1)(x+4) + (x-1)(x+2)}{(x+2)(x+4)} = 2$$

$$\frac{x^2 + 4x + x + 4 + x^2 + 2x - x - 2}{x^2 + 4x + 2x + 8} = 2$$

$$\frac{2x^2 + 6x + 2}{x^2 + 6x + 8} = \frac{2}{1}$$

Korzystając z własności proporcji mnożymy „na krzyż”.

$$2x^2 + 6x + 2 = 2x^2 + 12x + 16$$

$$-6x = 14 \mid : (-6)$$

$$x = -\frac{7}{3} \in D.$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $(-\frac{7}{3})$.

Przykład 3

Rozwiążemy **równanie wymierne** $\frac{2}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-4x+4}$.

Najpierw zapiszemy mianowniki ułamków algebraicznych w postaci iloczynowej.

$$\frac{2}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$.

Przeniesiemy wyrażenia na jedną stronę równania i ustalimy wspólny mianownik.

$$\frac{2(x+2)(x-2)+(x+1)(x-2)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{2(x^2-4)+x^2-2x+x-2-x^2-2x-x-2}{(x+1)(x+2)(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{2x^2-8-4x-4}{(x+1)(x+2)(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{2x^2-4x-12}{(x+1)(x+2)(x-2)^2} = 0$$

$$2x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\Delta = 4 + 24 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7} \in D$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{7}}{2} = 1 + \sqrt{7} \in D$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $1 - \sqrt{7}$, $1 + \sqrt{7}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\frac{2}{x^3+8} - \frac{3}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-2x+4}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Zapiszemy mianowniki ułamków algebraicznych w postaci iloczynowej, wykorzystując wzory skróconego mnożenia.

$$\frac{2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-2x+4}.$$

Najmniejszym wspólnym mianownikiem trzech ułamków będzie iloczyn

$$(x-2)(x+2)(x^2-2x+4).$$

$$\frac{2(x-2)-3(x^2-2x+4)-4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$\frac{2x-4-3x^2+6x-12-4x^2+16}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$\frac{-7x^2+8x}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$-7x^2 + 8x = 0$$

$$-x(7x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \frac{8}{7}$$

Rozwiązaniem równania są liczby 0 i $1\frac{1}{7}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = 3.$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-6, -5, -4, -3\}$.

W rozwiązaniu równania skorzystamy z własności $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Czyli:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = 3$$

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} = 3$$

Sprowadzimy lewą stronę równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{x+6-x-3}{(x+3)(x+6)} = 3$$

$$\frac{3}{(x+3)(x+6)} = 3$$

$$(x+3)(x+6) = 1$$

$$x^2 + 6x + 3x + 18 = 1$$

$$x^2 + 9x + 17 = 0$$

$$\Delta = 81 - 68 = 13$$

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-9+\sqrt{13}}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $\frac{-9-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-9+\sqrt{13}}{2}$.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$)

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj sposoby rozwiązania równania wymiernego.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrvCRaZGe>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równań wymiernych zapisanych za pomocą sumy ułamków algebraicznych.

Ćwiczenie 1

Połącz równanie z rozwiązaniem równania.

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x+3} = 1$$

$$x = -3 - \sqrt{10}, x = -3 + \sqrt{10}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} = 1$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{37}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{37}}{2}$$

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} = 0$ jest:

☐ $x = \frac{1}{2}$

☐ $x = 3$

☐ $x = -\frac{1}{2}$

☐ $x = 2$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1$:

☐ ma jedno rozwiązanie $x = 2$

☐ jest sprzeczne

☐ ma jedno rozwiązanie $x = -1$

☐ jest nieoznaczone

Ćwiczenie 3



Przeciągnij poprawne wyrażenie.

Po sprowadzeniu ułamków algebraicznych występujących po lewej stronie równania

$\frac{x}{x^2-16} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x^2+8x+16} = 2$ do wspólnego mianownika otrzymamy najmniejszy wspólny mianownik:

$(x-4) \cdot$ $.$

$(x-4)$

$(x-4)^2$

$(x+4)^2$

$(x+4)$

Ćwiczenie 4



Dane jest równanie wymierne $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} = 4$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie ma dwa rozwiązania.

☐ Rozwiązania równania są liczbami niewymiernymi.

☐ Rozwiązania równania są liczbami przeciwnymi.

☐ Równanie ma dwa rozwiązania dodatnie.

Ćwiczenie 5



Wpisz odpowiednią liczbę.

Równanie $\frac{2x}{x+5} + \frac{10}{x+5} = p$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $p =$ $.$

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania $\frac{3}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x}$ jest:

☐ $x = \frac{1}{2}$

☐ $x = 1$

☐ $x = 0$

☐ $x = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie $\frac{x}{|x+1|} = \frac{2}{x} + 3$. Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę zapisaną w postaci ułamka dziesiętnego.

$x =$

Ćwiczenie 8



Połącz w pary równanie wymierne z rozwiązaniem.

$\frac{2}{x^2-2x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{2}{x^3-1}$

$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

$x = -1$

$\frac{1}{x^2-4} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x+2}$

$x = -4$

$\frac{1}{x^2-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x-2}$

$x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}, x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wymierne zapisane za pomocą sumy ułamków algebraicznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wymierne zapisane za pomocą sumy ułamków algebraicznych
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego zapisanego za pomocą sumy ułamków algebraicznych
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego i dziedziny równania wymiernego.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie sposobu doprowadzania wyrażen wymiernych do wspólnego mianownika. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie przygotowany wcześniej przykład. Kolejna grupa dodaje swój przykład.
2. Uczniowie analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w parach oglądają animację i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wyrażenia wymierne. Równania wymierne](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.