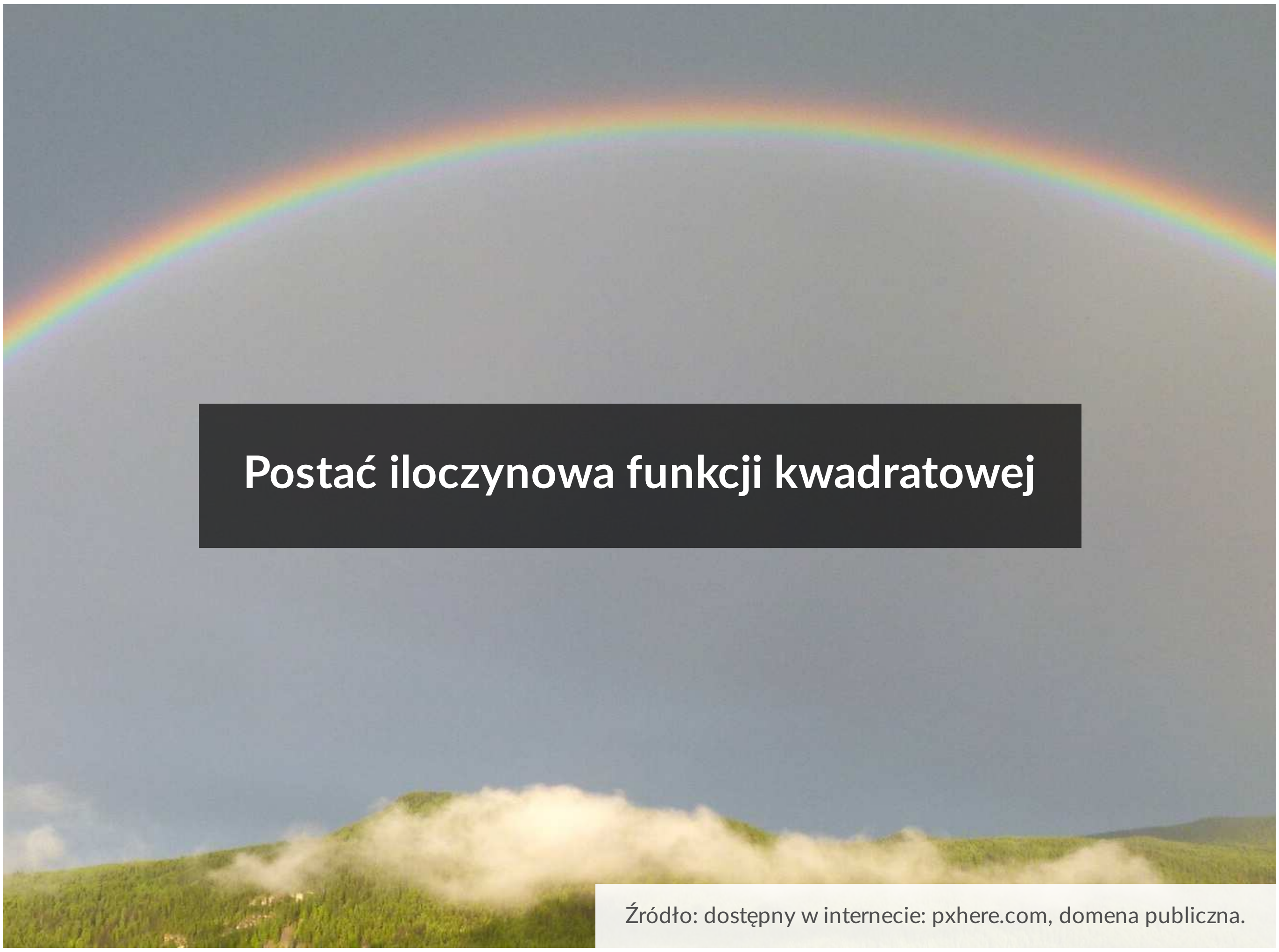
Postać iloczynowa funkcji kwadratowej



Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Wzór funkcji kwadratowej może przyjmować różne postacie: ogólną, kanoniczną oraz iloczynową. Czy każda z tych postaci zawsze istnieje? Okazuje, że dwie z nich istnieją zawsze, a trzecia zależy od wartości pewnej wielkości.

W tym materiale rozważymy warunki, które pozwolą (lub nie) zapisać wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej.

Bazując na części teoretycznej materiału oraz przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zapiszesz wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynu.
- Wyznaczysz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, w celu zapisania wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej.
- Zamienisz postać iloczynową funkcji kwadratowej na postać ogólną oraz postać ogólną na postać iloczynową.
- Zastosujesz wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej do wyznaczania wartości parametrów.

Przeczytaj

Wzór funkcji kwadratowej f możemy zapisać w postaci:

- ogólnej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$,
- kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz $a \neq 0$.

Oprócz postaci ogólnej i kanonicznej, występuje również postać iloczynowa wzoru funkcji kwadratowej.

Niektóre wzory funkcji kwadratowej możemy zapisać w postaci iloczynowej poprzez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, czy wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Przykład 1

Zapiszemy w postaci iloczynowej wzór funkcji kwadratowej f:

a. $f(x) = x^2 - 25$

   Rozwiązanie:

   Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, wzór funkcji f przedstawiamy w postaci iloczynowej:

   $f(x) = (x-5)(x+5)$

b. $f(x) = 2x^2 - 10x$

   Rozwiązanie:

   Po wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias otrzymujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

   $f(x) = 2x(x-5)$

c. $f(x) = x^2 - 12x + 36$

   Rozwiązanie:

> Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy, wzór funkcji f przedstawiamy w postaci iloczynowej:
> $f(x) = (x - 6)^2$

Występowanie postaci iloczynowej wzoru funkcji kwadratowej zależy od wartości wyróżnika odpowiedniego trójmianu kwadratowego.

Dla $\Delta > 0$ mamy:

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Wtedy wzór funkcji kwadratowej f zapisujemy w postaci iloczynowej:
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Dla $\Delta = 0$ mamy:

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{a}$.

Wtedy wzór funkcji kwadratowej f zapisujemy w postaci iloczynowej:
$f(x) = a(x - x_0)^2$.

Dla $\Delta < 0$ mamy:

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa f nie ma miejsc zerowych.

Jeżeli funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, wówczas postać iloczynowa wzoru funkcji kwadratowej nie istnieje.

Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ sprowadza się do rozwiązania równania $ax^2 + bx + c = 0$, czyli do wyznaczenia pierwiastków odpowiedniego równania kwadratowego.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej jest równoznaczne z zapisaniem wzoru tej funkcji w postaci iloczynu czynników liniowych.

W celu zamiany wzoru funkcji kwadratowej z postaci ogólnej na postać iloczynową, użyjemy podanych wcześniej zależności.

Przykład 2

Zapiszemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej, jeżeli $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

Rozwiązanie:

Współczynniki we wzorze funkcji f wynoszą odpowiednio: $a = 2, b = -7, c = 3$.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$.

Ponieważ $\Delta > 0$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

Zatem: $\sqrt{\Delta} = 5$ oraz $x_1 = \frac{7-5}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{7+5}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3$.

Postać iloczynowa wzoru funkcji f wynosi $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$.

Z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej możemy odczytać jej miejsce zerowe, bez wykonywania obliczeń.

Przykład 3

Bez obliczania wartości wyróżnika, podamy jego znak, jeżeli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -3(x + 8)(x - 2)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wzór funkcji f jest zapisany w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, zatem miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = -8$ oraz $x_2 = 2$.

> Ponieważ funkcja f ma dwa miejsca zerowe, zatem $\Delta > 0$.

Postać iloczynową funkcji kwadratowej możemy w łatwy sposób zamienić na postać ogólną.

> **Przykład 4**
>
> Zapiszemy wzór funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -3(x-2)(x+1)$ w postaci ogólnej.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Zauważmy, że wystarczy wykonać mnożenie jednomianów, a następnie uporządkować je tak, aby otrzymać postać ogólną wzoru funkcji kwadratowej.
>
> Otrzymujemy, że:
> $f(x) = -3\left(x^2 + x - 2x - 2\right) = -3\left(x^2 - x - 2\right) = -3x^2 + 3x + 6$.

Wzór na postać iloczynową funkcji kwadratowej możemy wykorzystać do znajdowania brakujących współczynników we wzorze tej funkcji, mając dane np. miejsca zerowe tej funkcji.

> **Przykład 5**
>
> Zapiszemy wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej wiedząc, że jej miejscami zerowymi są liczby 3 i -2, jeżeli do paraboli, będącej wykresem funkcji f należy punkt o współrzędnych $P = (-3, 2)$.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Ponieważ funkcja f ma dwa miejsca zerowe, więc wykorzystamy jej wzór w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
>
> Po podstawieniu do wzoru funkcji $x_1 = 3$ oraz $x_2 = -2$ mamy:
> $f(x) = a(x-3)(x+2)$. Ponieważ punkt P należy do wykresu funkcji, zatem do

wyznaczania wartości współczynnika a rozwiązujemy równanie:

$2 = a(-3-3)(-3+2)$

$a = \frac{1}{3}$.

Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem: $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x+2)$.

Przykład 6

Wyznaczymy wartości współczynników b i c we wzorze funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 + bx + c$, jeżeli miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 2$.

Rozwiązanie:

W tym celu wykorzystamy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Wtedy $f(x) = 2(x+3)(x-2)$, co po przekształceniu sprowadza się do postaci:

$f(x) = 2x^2 + 2x - 12$, zatem $b = 2$ i $c = -12$.

Dla zainteresowanych

Przeanalizuj symulację i sprawdź swoją wiedzę w zakresie wyznaczania postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, mając daną jej postać ogólną.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D10CMIKrp

Słownik

postać iloczynowa wzoru funkcji kwadratowej

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdy $\Delta > 0, x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$f(x) = a(x - x_0)^2$, gdy $\Delta = 0, x_0 = \frac{-b}{2a}$

brak postaci iloczynowej, gdy $\Delta < 0$

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj poniższy schemat interaktywny, a następnie wykonaj polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D18dA8XgC

Polecenie 2

Wyznacz postać iloczynową wzoru funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$.

Polecenie 3

Stwórz algorytm wyznaczający postać iloczynową funkcji kwadratowej, mając daną postać ogólną $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wyznacz wartość parametru a we wzorze funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = a(x - x_0)^2$, jeżeli wiadomo, że do paraboli, będącej wykresem tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(-3, 2)$, a jedynym miejscem zerowym jest liczba 4.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza oblicza miejsca zerowe funkcji kwadratowej i wyznacza jej postać iloczynową,
- zamienia wzór funkcji w postaci iloczynowej na postać ogólną i odwrotnie;
- wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do wyznaczenia jej wzoru.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna

1. Nauczyciel omawia z uczniami materiał z sekcji „Wprowadzenie”, ustala z uczniami cele zajęć oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Wybrany uczeń zapisuje istotne informacje na tablicy.

Faza realizacyjna

1. Uczniowie podzieleni na 3-osobowe grupy zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania dla innych grup. Odpowiadają na nie pozostali uczniowie, a nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wyświetlają zawartość sekcji „Schemat interaktywny”. Wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1. Po zaznajomieniu się z treściami uczniowie komentują, i w razie potrzeby proszą o wyjaśnienie nauczyciela.
3. Uczniowie dobierają się w pary i wykonują ćwiczenia nr 1-2. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. W dalszej części uczniowie podzieleni na grupy 4-osobowe biorą udział w lidze zadaniowej. W tym celu wykonują w ćwiczenia 3-8 z sekcji „Sprawdź się” na czas. Po zakończeniu czasu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie przed całą klasą. Po przedstawieniu rozwiązań przez uczniów następuje podsumowanie pracy przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze

- Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne

- Materiał z części „Schemat interaktywny” można wykorzystać do powtórzenia wiadomości w omawianym temacie.
- Nauczyciel powinien ocenić pracę grupową uczniów. W ocenie pracy na lekcji należy uwzględnić wkład pracy ucznia.
- Schemat interaktywny można wykorzystać rozwiązując równania kwadratowe.