Twierdzenie Bézouta

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Dan Burton, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiemy, że funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy jej wzór da się sprowadzić do postaci $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Oznacza to, że liczby x_1, x_2 są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu.
O analogicznej własności dla wielomianu dowolnego stopnia mówi twierdzenie, które w polskich podręcznikach nosi nazwę twierdzenia Bézouta.

Ciekawostka

Étienne Bézout był francuskim matematykiem żyjącym w latach 1730-1783, autorem cenionych podręczników akademickich. Zajmował się głównie algebrą. Jedno z twierdzeń geometrii algebraicznej nosi jego nazwisko i nie jest to twierdzenie o pierwiastkach wielomianu, funkcjonujące pod nazwą twierdzenia Bézouta.

Twoje cele

- Zastosujesz twierdzenie Bézouta, określając pierwiastki wielomianu.
- Wykorzystasz związek między liczbą pierwiastków wielomianu, a jego stopniem.
- Skorzystasz z zapisu wielomianu w postaci iloczynowej do wyznaczania pierwiastków tego wielomianu.

Przeczytaj

Przykład 1

Wyznaczmy pierwiastki wielomianu $W(x) = 4(x-2)(x+1)(x-7)$.

- Zauważmy, że wielomian W przyjmuje wartość 0 dla $x = -1$, $x = 2$ lub $x = 7$ i są to jedyne pierwiastki tego wielomianu.

Twierdzenie: Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty.

Dowód

Twierdzenie ma postać równoważności ($\Leftrightarrow$), aby je udowodnić należy wykazać prawdziwość dwóch implikacji.

- Dowód $\Rightarrow$
  Zakładamy, że $W(a) = 0$. Wtedy reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ wynosi 0, czyli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$.
- Dowód $\Leftarrow$:
  Zakładamy, że $W(x)$ dzieli się przez $x - a$. Zatem istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x) = (x-a) \cdot Q(x)$. Ale wtedy $W(a) = (a-a) \cdot Q(a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Z twierdzenia Bézouta wiemy, że jeżeli liczba x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian ten można zapisać w postaci
$W(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$.
To spostrzeżenie można uogólnić:

Własność: Postać iloczynowa wielomianu

> Jeżeli wielomian
> $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stopnia n ma n pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to można go zapisać w postaci iloczynowej
> $W(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

Z postaci iloczynowej wynika zależność między stopniem wielomianu i maksymalną liczbą jego pierwiastków.

> **Własność: Liczba pierwiastków wielomianu**
>
> - Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych.
> - Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

> **Przykład 2**
>
> Wyznaczmy wszystkie pierwiastki wielomianu
> $W(x) = \left(x^2 - 3x - 4\right)\left(x^2 + x - 6\right)$.
>
> - Korzystamy z postaci iloczynowej wielomianów stopnia 2:
> $Q(x) = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$ oraz
> $P(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ i otrzymujemy:
> $W(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 2)(x + 3)$.
> - Zatem $W(x)$ jest podzielny przez dwumiany $x + 1$, $x - 4$, $x - 2$ oraz $x + 3$.
> - Zgodnie z twierdzeniem Bézouta liczby -1, 4, 2 i -3 są pierwiastkami $W(x)$.
> - $W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia, więc to jedyne pierwiastki tego wielomianu.

> **Przykład 3**
>
> Sprawdźmy, czy wielomian $W(x) = x^{51} - 17x^{32} + 18$ jest podzielny przez
>
> - $x - 1$,
> - $x - 2$,

- $x + 1$.

Przykład 4

Ustalmy, dla jakich liczb naturalnych jednocyfrowych a wielomian $W(x) = x^{14} - 3x^{13} + 2x^{12} + x^2 - 3x + 2$ jest podzielny przez $x - a$.

- Zauważmy, że $W(x) = x^{12}(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - 3x + 2)$.
- Zatem $W(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^{12} + 1)$.
- Sprowadzając trójmian kwadratowy $x^2 - 3x + 2$ do postaci iloczynowej dostajemy
  $W(x) = (x - 1)(x - 2)(x^{12} + 1)$.
- Wiemy, że $W(1) = W(2) = 0$, więc, z twierdzenia Bézouta, wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumiany $x - 1$ oraz $x - 2$.
- Trójmian kwadratowy nie ma więcej miejsc zerowych, a wyrażenie $x^{12} + 1$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Zatem wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$ tylko dla $a = 1$ lub $a = 2$.

Słownik

liczba pierwiastków wielomianu

wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych; wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty

pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0) = 0$

postać iloczynowa wielomianu

jeżeli wielomian
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stopnia n ma n pierwiastków x_1, x_2, $\ldots$, x_n, to można go zapisać w postaci iloczynowej
$W(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą przykłady zastosowań twierdzenia Bézouta.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DLPnGvAFy

Film nawiązujący do przykładów zastosowań twierdzenia Bézouta.

Korzystając z metod zaprezentowanych w animacji rozwiąż następujące zadania:

Polecenie 2

Sprawdź, czy wielomian $W\left(x\right) = x^3 - 2x^2 - 14x + 4$ jest podzielny przez dwumian $x + 3$.

Polecenie 3

Jednym z pierwiastków wielomianu $W\left(x\right) = x^5 - 11x^4 - 25x + 275$ jest liczba 11. Wyznacz wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego wielomianu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie Bézouta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:
5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
Zakres rozszerzony 1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna twierdzenie Bézouta;
- określa związek między liczbą pierwiastków wielomianu a jego stopniem;
- wykorzystuje zapis wielomianu w postaci iloczynowej do wyznaczania jego pierwiastków.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat lekcji oraz przedstawia cele zajęć. Następnie wraz z uczniami ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj” oraz animacją. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Twierdzenie Bézouta” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze

Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

- Animację można potraktować jako zadanie domowe utrwalające wiadomości o wykorzystaniu twierdzenie Bézouta.
- Nauczyciel może wykorzystać animację na lekcji o pierwiastkach wielomianu.