



Wyznaczanie szczególnych rozwiązań równania wielomianowego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wyznaczanie szczególnych rozwiązań równania wielomianowego

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale pokażemy metody wyznaczania pierwiastków całkowitych równania wielomianowego przez „zgadywanie” oraz przez zastosowanie wzorów Viète’a dla równań stopnia trzeciego. Ustalimy również, od czego zależy liczba rozwiązań równania wielomianowego.

Twoje cele

- Odgadniesz całkowite pierwiastki równania wielomianowego.
- Obliczysz rozwiązania równania trzeciego stopnia, korzystając ze wzorów Viète’a.
- Wyznaczysz wartości parametrów w równaniu trzeciego stopnia, korzystając ze wzorów Viète’a.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$, nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n .

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu nazywamy taką liczbę rzeczywistą a , dla której zachodzi równość $W(a) = 0$.

Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Twierdzenie: Wzory Viète'a dla równania trzeciego stopnia

Jeżeli x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, to:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = c \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d \end{cases}$$

Dowód

Skoro x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, więc są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Wielomian $W(x)$ możemy zapisać w postaci iloczynowej $W(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, stąd:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)(x - x_3) = \\ &= [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2](x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + (x_1 + x_2)x_3x - x_1x_2x_3 = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Ponieważ wielomiany są równe, otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b \text{ i } x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c \text{ i } x_1x_2x_3 = -d,$$

co kończy dowód.

Na pewno znasz różne metody wyznaczania pierwiastków równania wielomianowego.

Możemy je obliczać przez sprowadzenie do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, grupowania wyrazów lub korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

Najpierw omówimy jednak prostszą metodę wyznaczania całkowitych pierwiastków równania przez „zgadywanie”.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania wielomianowego

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$. Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^5 + 1 = 0$.

Możemy zauważyć, że $W(-1) = 0$, czyli liczba $x = -1$ jest rozwiązaniem równania. Równanie nie posiada innych rzeczywistych rozwiązań.

Przykład 2

Szczególnym **równaniem wielomianowym** może być równanie kwadratowe. Wyznamy rozwiązanie równania $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego, zwany „delta” jest równy:

$\Delta = 9 - 8 = 1$, oznacza to, że równanie ma dwa rozwiązania.

Ze wzorów Viète’a dla równań stopnia drugiego mamy:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, x_1 \cdot x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 + x_2 = 3$$

Jakie to liczby, których iloczyn jest równy 2, a suma 3? Łatwo zauważyć, że są to liczby 1 i 2.

Ponieważ liczba pierwiastków jest nie większa, niż stopień równania, zatem są to wszystkie rozwiązania równania.

Rozwiązania równania to $x = 1$, $x = 2$.

Przykład 3

Szczególnym równaniem wielomianowym jest również równanie liniowe, czyli takie w którym niewiadoma występuje w pierwszej potęgze.

Rozwiążemy równanie $100x - 1 = 0$.

$$100x - 1 = 0$$

$$100x = 1$$

$$x = \frac{1}{100}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{100}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

W tym celu spróbujemy „odgadnąć” pierwiastek całkowity odpowiedniego wielomianu.

$$W(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Łatwo zobaczyć, że suma współczynników wielomianu jest równa 0, więc liczba 1 jest pierwiastkiem równania.

$$W(1) = (1)^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$W(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

Jest to równanie czwartego stopnia, więc może mieć cztery rozwiązania. Sprawdźmy, czy liczba 2 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

$$W(2) = 2^4 - 5 \cdot (-2)^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$$

$$\text{Zatem również } W(-2) = (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0.$$

Równanie ma cztery rozwiązania $x = -2, x = -1, x = 1, x = 2$.

Przykład 5

Dane jest równanie $x^3 - 2x^2 + zx + u = 0$, które ma trzy pierwiastki. Obliczymy wartości parametrów z i u oraz rozwiązania x_1, x_2, x_3 równania, jeżeli wiadomo, że $x_2 = x_1 - 3, x_3 = x_1 + 2$.

Korzystając ze wzorów Viète'a dla równań trzeciego stopnia, mamy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = z \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -u \end{cases}$$

$$x_1 + x_1 - 3 + x_1 + 2 = 2$$

$$3x_1 = 3$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 - 3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 1 + 2$$

$$x_3 = 3$$

Obliczymy wartości parametrów z i u .

$$1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 = z$$

$$-2 + 3 - 6 = z$$

$$z = -5$$

$$1 \cdot (-2) \cdot 3 = -u$$

$$u = 6$$

Liczby 1, -2 i 3 są pierwiastkami równania, parametr $z = -5$, parametr $u = 6$.

Słownik

równanie wielomianowe

równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykład, a następnie sprawdź poprawność, analizując poszczególne etapy rozwiązania.

Polecenie 2

Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami równania $x^3 + 7x^2 + cx + d = 0$. Znajdź te liczby oraz wartości współczynników c i d wiedząc, że $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 4$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $x^4 - 1 = 0$ ma:

☐ 4 rozwiązania

☐ 3 rozwiązania

☐ 1 rozwiązanie

☐ 2 rozwiązania

Ćwiczenie 2



Wpisz odpowiednią liczbę.

Równanie $x^4 + 1 = 0$ ma rozwiązania/rozwiązań.

Ćwiczenie 3



Rozwiąż równanie $0,000001x = 1$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $x = 1000000$

☐ $x = 1$

☐ $x = -0,000001$

☐ $x = 0,000001$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary. „Odgadnij” rozwiązania równania kwadratowego.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 1, x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -2, x = 1$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = -1, x = -2$$

Ćwiczenie 5



„Odgadnij” rozwiązania równania $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Wpisz rozwiązania w kolejności rosnącej.

$x =$, $x =$, $x =$, $x =$

Ćwiczenie 6



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Wiedząc, że liczby $-1, 1$ są rozwiązaniami równania $x^3 - 12x^2 - x + 12 = 0$, oblicz trzeci pierwiastek. Skorzystaj z wzoru Viète'a na iloczyn pierwiastków równania.

$x_3 =$

Ćwiczenie 7



Korzystając z wzorów Viète'a, rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Suma pierwiastków równania jest równa 6.

☐ Rozwiązanie równania to: $x = 1, x = 2, x = 3$.

☐ Rozwiązanie równania to: $x = -3, x = -2, x = -1$.

☐ Iloczyn pierwiastków równania jest równy 6.

Ćwiczenie 8



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Oblicz wartości parametrów p i g oraz rozwiązania x_1, x_2, x_3 równania

$x^3 + 6x^2 + px + g = 0$, jeżeli $x_2 = x_1 - 1, x_3 = x_1 - 2$.

$p =$, $g =$, $x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$

-3

-11

-2

6

3

-6

-1

11

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie szczególnych rozwiązań równania wielomianowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odgaduje całkowite pierwiastki równania wielomianowego
- oblicza rozwiązania równania trzeciego stopnia korzystając ze wzorów Viete'a
- wyznacza wartości parametrów w równaniu trzeciego stopnia, korzystając ze wzorów Viete'a
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie przypominają definicję równania wielomianowego i rozwiązania równania.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania zadań.
3. Uczniowie oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów wyznaczania szczególnych rozwiązań równania wielomianowego.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się rozwiązać zadań interaktywnych rozwiązują zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

[Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu](#)

Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą analizować infografikę w parach, na zajęciach wprowadzających pojęcie równania wielomianowego.