



Wariacje bez powtórzeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wariacje bez powtórzeń

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Uczniowie Twojej szkoły biorą udział w loterii i każdy z nich kupuje jeden los. W loterii jest 5 głównych nagród: I – miesięczny karnet na siłownię; II – dwutygodniowy karnet na basen, III – 2 bilety do kina, IV – powerbank, V – gra planszowa. Na ile sposobów uczniowie mogą wylosować te nagrody? W tym materiale przedstawimy Ci narzędzie, które pozwoli odpowiedzieć na to pytanie.

Twoje cele

- Dowiesz się, że każda funkcja różnowartościowa ze skończonego zbioru A do skończonego zbioru B ($|A| \geq |B|$) da się zidentyfikować jako wariacja bez powtórzeń, co pozwoli Ci wyznaczyć liczbę wszystkich takich funkcji,
- Rozpoznasz wariacje bez powtórzeń w typowych doświadczeniach, polegających na losowaniu kolejnych elementów z ustalonego zbioru, kiedy losowane elementy nie powtarzają się.
- Znajomość twierdzenia o liczbie wariacji bez powtórzeń pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników wymienionych wyżej doświadczeń.

Przeczytaj

Rozpatrzmy doświadczenie polegające na wyborze kolejno k elementów ze zbioru n -elementowego, bez powtórzeń, gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą warunek $1 \leq k \leq n$.

Korzystając z reguły mnożenia stwierdzamy, że liczba wszystkich możliwych wyników w takim doświadczeniu jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}}.$$

Modelem dla tego typu doświadczenia jest k -wyrazowy ciąg o elementach wybieranych bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego.

Definicja: wariacja bez powtórzeń

Doświadczenie polegające na wyborze kolejno k elementów ze zbioru n -elementowego, bez powtórzeń, gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą warunek $1 \leq k \leq n$, nazywa się k -wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

Twierdzenie: liczba wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}}.$$

Zauważmy, że otrzymany wzór można przekształcić następująco

$$\frac{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{\text{czynników}} \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zwyczajowo liczbę wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego oznacza się symbolem V_n^k .

Zatem dla dowolnych liczb całkowitych k i n takich, że $1 \leq k \leq n$ mamy

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Przykład 1

Obliczymy, ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych, których dziedziną jest zbiór $\{a, b, c, d\}$, a zbiorem wartości jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Rozwiązanie

Każda opisana wyżej funkcja różnowartościowa da się wzajemnie jednoznacznie przyporządkować do czteroelementowego ciągu (a, b, c, d) , którego elementy przyjmują parami różne wartości z siedmioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Dla przykładu:

- spełniającej warunki zadania funkcji f , takiej, że $f(a) = 5$, $f(b) = 7$, $f(c) = 1$, $f(d) = 2$ przypisany jest w ten sposób ciąg $(5, 7, 1, 2)$,
- ciągowi $(3, 4, 6, 1)$ przypisana jest funkcja f taka, że $f(a) = 3$, $f(b) = 4$, $f(c) = 6$, $f(d) = 1$.

Zatem wszystkich takich funkcji jest tyle, ile czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru siedmioelementowego, czyli $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Otrzymany wynik możemy również zapisać w postaci

$$V_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!}.$$

Uwaga

Każda k -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n -elementowego **jest funkcją różnowartościową** ze zbioru k -elementowego do zbioru n -elementowego, gdzie $1 \leq k \leq n$.

Przykład 2

Pięcioro przyjaciół: Jaś, Małgosia, Adaś, Ewa i Hela ma wybrać pięć miejsc spośród jedenastu dostępnych w tym samym rzędzie w kinie. Obliczymy, na ile różnych sposobów mogą tego dokonać.

Rozwiązanie

Każdy dokonany wybór można przedstawić jako pięcioelementową wariację bez powtórzeń zbioru jedenastoelementowego.

Liczba wszystkich możliwych wyborów pięciu różnych miejsc w jedenastoelementowym rzędzie jest równa

$$V_{11}^5 = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440.$$

Zatem jest 55440 rozmieszczeń opisanych warunkami zadania.

Przykład 3

Wykażemy, że wszystkich pięcioelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru piętnastoelementowego jest 21 razy więcej niż wszystkich czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru trzynastoelementowego.

Dowód

Zauważmy, że

$$21 \cdot V_{13}^4 = 21 \cdot \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{21 \cdot 13!}{9!} = \frac{10 \cdot 21 \cdot 13!}{10 \cdot 9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{10!} = \frac{15!}{(15-5)!} = V_{15}^5.$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 4

Obliczymy n , wiedząc, że wszystkich trzejelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest 990.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczba całkowita n spełnia równanie

$$V_n^3 = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = 990.$$

Zatem $n > 2$, a wtedy ciąg $a_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ jest rosnący.

Ponieważ $a_{11} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$, więc $n = 11$.

Słownik

wariacja bez powtórzeń

k -wyrazowy ciąg o elementach wybieranych bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego, gdzie $1 \leq k \leq n$

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązania zadań dotyczących zapisu dziesiętnego liczb naturalnych. Jest w nich pokazane, jak wykorzystać wzór na liczbę wariacji bez powtórzeń.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2Mjnr3lz>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wariacji bez powtórzeń.

Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego w animacji, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrujemy wszystkie pięciocyfrowe liczby naturalne o różnych cyfrach, w których zapisie dziesiętnym nie występuje żadna z cyfr 0, 4.

Oblicz, ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Liczba wszystkich czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru siedmioelementowego jest równa

☐ 840

☐ 343

☐ 2401

☐ 210

Ćwiczenie 2



Oznaczmy przez x liczbę wszystkich możliwych wyborów trzech osób: przewodniczącego, zastępcy i skarbnika do samorządu 32-osobowej klasy. Wówczas

☐ $x = \frac{32!}{29!}$

☐ $x = 32^3$

☐ $x = 32 \cdot 31 \cdot 30$

☐ $x = \frac{32!}{3!}$

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest wszystkich możliwych sześcioliterowych napisów o różnych literach wybranych z dziewięcioelementowego zbioru

$$\{m, a, t, e, i, k, x, y, z\}$$

W kratki poniżej wpisz kolejne cyfry otrzymanej liczby.

Ćwiczenie 4



Rozpatrzmy następujące trzy zbiory:

$$A = \{a, b, c, d\},$$

$$X = \{x, y, z\},$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Oznaczmy przez:

k - liczbę wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru A do zbioru N ,

m - liczbę wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru X do zbioru N .

Oblicz $\frac{m}{k}$.

W kratkach poniżej wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Ćwiczenie 5



Rozmieszczamy 4 różne kule w 10 różnych pudełkach tak, żeby w każdym pudełku znalazła się co najwyżej jedna kula.

Wykaż, że wszystkich takich rozmieszczeń jest 5040.

Ćwiczenie 6



Oblicz k , wiedząc, że

$$V_{22}^6 = k \cdot V_{21}^4$$

W kratkach poniżej wpisz kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Ćwiczenie 7



Przyporządkuj do siebie pary równych liczb.

$$143 \cdot V_8^5$$

$$960 \cdot V_{11}^3$$

$$30 \cdot V_{10}^5$$

$$4 \cdot V_{14}^5$$

$$10 \cdot V_{12}^5$$

$$15 \cdot V_9^6$$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 4$ prawdziwa jest równość

$$V_n^4 + 4 \cdot V_n^3 + 1 = (V_n^2 - 1)^2$$

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wariacje bez powtórzeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- identyfikuje funkcje różnowartościowe ze skończonego zbioru A do skończonego zbioru B ($|A| \geq |B|$) jako wariacje bez powtórzeń,
- rozpoznaje wariacje bez powtórzeń w typowych doświadczeniach, polegających na losowaniu kolejnych elementów z ustalonego zbioru, kiedy losowane elementy nie powtarzają się,
- wykorzystując twierdzenia o liczbie wariacji bez powtórzeń oblicza, ile jest wyników w typowych doświadczeniach, polegających na losowaniu kolejnych elementów z ustalonego zbioru, kiedy losowane elementy nie powtarzają się.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Wariacje bez powtórzeń” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj”. Notują wątpliwości i niezrozumiałe treści, które wyjaśniane są na forum klasy.
2. Następnie w grupach analizują zaprezentowane rozwiązania zadań dotyczących zapisu dziesiętnego liczb naturalnych, z wykorzystaniem wzorów na liczbę wariacji bez powtórzeń w animacji. Uczniowie zapoznają się treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie w grupach rozwiązują zadania 1-4, 6, 7 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa,

a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- [Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Wariacje bez powtórzeń”.