



Konstrukcje kątów o miarach 15° , 30° , 45° , 60°

Materiał składa się z sekcji: "Konstrukcja kąta o mierze 60° , kąta o mierze 30° oraz kąta o mierze 15° ", "Konstrukcja kąta o mierze 45° ", "Suma i różnica kątów".

Materiał zawiera filmy, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Filmy i aplety- konstrukcja trójkąta równobocznego, konstrukcje kątów 60 stopni, 30 stopni, 15 stopni, 45 stopni.

Przykłady z apletami bądź rysunkami - konstrukcja kątów przystających, konstrukcja sumy kątów.

Ćwiczenia - konstrukcje kątów o danych miarach, konstrukcja sumy, różnicy kątów, konstrukcja wielokątów o danych własnościach.

Konstrukcje kątów o miarach 15° , 30° , 45° , 60°

Z tego materiału dowiesz się, jak za pomocą cyrkla i linijki narysować pewne, szczególne kąty oraz jak takie umiejętności wykorzystać do konstruowania sum i różnic kątów oraz niektórych wielokątów. Aby zrozumieć te zagadnienia, przypomnij sobie konstrukcje zamieszczone w materiałach [Dwusieczna kąta](#) oraz [Symetralna odcinka](#).

Znajdziesz tu animacje, aplety, przykłady zadań z rozwiązaniami oraz ćwiczenia do sprawdzenia swojej wiedzy.

Ważne!

Trójkąt równoboczny to trójkąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość.

Przykład 1

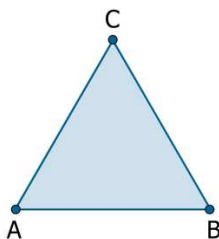
Korzystając z linijki i cyrkla, skonstruujemy trójkąt równoboczny.

Opis konstrukcji.

- Rysujemy odcinek AB – jeden z boków trójkąta.
- Z punktów A i B kreślimy cyrklem okręgi o promieniu AB .
- Okręgi te przecinają się w dwóch punktach. Jeden z tych punktów oznaczamy C , będzie to trzeci wierzchołek kreślonego trójkąta.
- Rysujemy odcinki AC i BC .
- Otrzymaliśmy trójkąt ABC o równych bokach, zatem trójkąt równoboczny.

Zapoznaj się z poniższą animacją oraz apletem, na których zaprezentowana jest konstrukcja trójkąta równobocznego.

Trójkąt równoboczny ABC



Film dostępny pod adresem </preview/resource/Rx51itwliWxDY>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_atrapa_animacja_214

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję trójkąta równobocznego.

Konstrukcja trójkąta równobocznego

etap 1 z 5



Dane są dwa punkty A i B.
Skonstruujemy trójkąt równoboczny,
którego dwoma wierzchołkami
są te dwa punkty.

A

B

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pd3qDh1bG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Konstrukcja kąta o mierze 60° , kąta o mierze 30° oraz kąta o mierze 15°

Przypomnijmy, że w trójkącie równobocznym każdy kąt ma miarę 60° .

Jeśli chcemy uzyskać kąt o mierze 60° , wystarczy skonstruować trójkąt równoboczny.

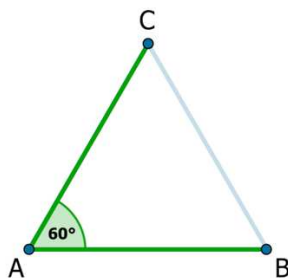
Przykład 2

Skonstruujemy kąt o mierze 60° .

Opis konstrukcji.

- Konstruujemy trójkąt równoboczny.
- Zaznaczamy jeden z kątów tego trójkąta. Jest to kąt trójkąta równobocznego, ma więc miarę 60° .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowana jest konstrukcja kąta o mierze 60° .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RpHFwzhW8de35>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_atrapa_animacja_215

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję kąta o mierze 60° .

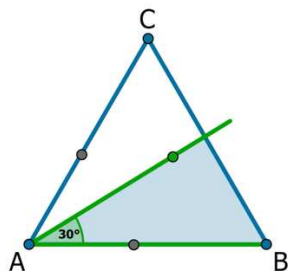
Przykład 3

Skonstruujemy kąt o mierze 30° .

Opis konstrukcji.

- Konstruujemy trójkąt równoboczny.
- Zaznaczamy jeden z kątów tego trójkąta. Jest to kąt trójkąta równobocznego, ma więc miarę 60° .
- Konstruujemy dwusieczną zaznaczonego kąta.
- Dwusieczna podzieliła kąt o mierze 60° na dwa równe kąty. Każdy z tych kątów ma więc miarę 30° . Zaznaczamy jeden z otrzymanych kątów, jest to szukany kąt.

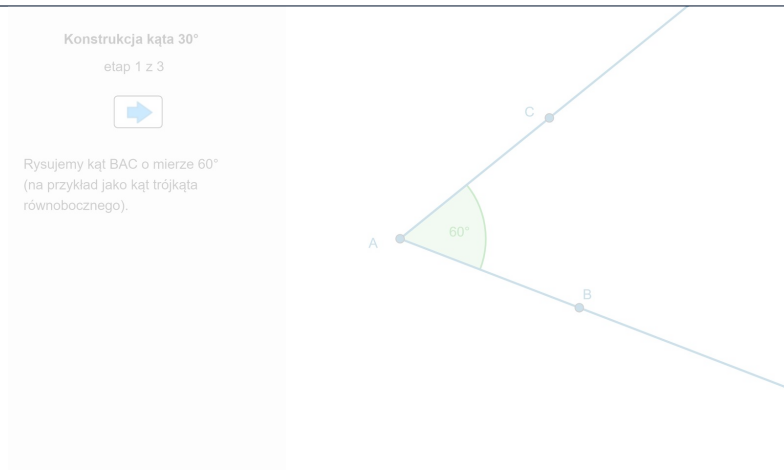
Zapoznaj się z poniższą animacją oraz apilem, w których zaprezentowana jest konstrukcja kąta o mierze 30° .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RICfMXiuaqImj>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_atrapa_animacja_216

Animacja przedstawia konstrukcję kąta o mierze 30° .

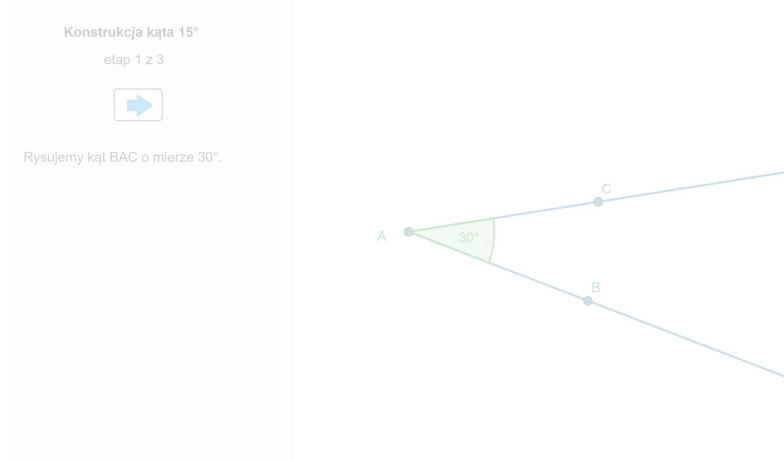


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pd3qDh1bG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Zapoznaj się z poniższym apletem, w którym zaprezentowana jest konstrukcja kąta o mierze 15° .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pd3qDh1bG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Konstrukcja kąta o mierze 45°

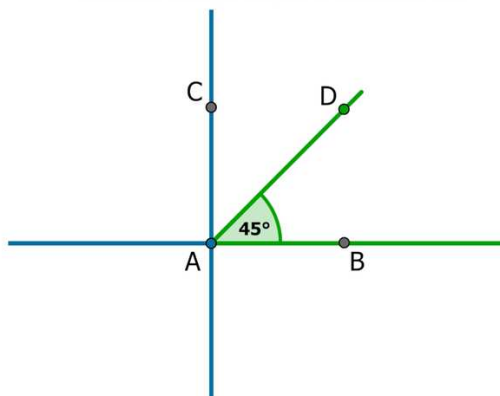
Przykład 5

Skonstruujemy kąt o mierze 45° . Kąt ten znajdziemy jako połowę kąta prostego, czyli kąta o mierze 90° .

Opis konstrukcji.

- Konstruujemy dwie proste prostopadłe.
- Oznaczamy A – punkt przecięcia narysowanych prostych.
- Otrzymaliśmy 4 kąty proste, każdy o wierzchołku w punkcie A .
- Z punktu A kreślimy okrąg o dowolnym promieniu.
- Oznaczmy B, C – punkty przecięcia okręgu z ramionami jednego z kątów.
- Z punktów B i C kreślimy okręgi o jednakowych promieniach tak, aby te okręgi przecięły się. Oznaczamy D – punkt przecięcia okręgów, leżący we wnętrzu kąta BAC .
- Rysujemy półprostą AD – dwusieczną kąta BAC .
- Półprosta AD podzieliła kąt BAC na dwa kąty o równych miarach. Zatem miara jednego z tych kątów, np. BAD jest równa $45^\circ = (90^\circ : 2)$.
- Szukanym kątem jest kąt BAD .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowana jest konstrukcja kąta o mierze 45° .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RRY2DGU3f4xNx>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję kąta o mierze 45° .

Suma i różnica kątów

Konstruując kąty o mierze 30° i o mierze 45° , należało kąty o miarach odpowiednio 60° i 90° podzielić na dwa kąty równe. Można też zbudować kąty, których konstrukcja wymaga dodawania kątów.

Nim przejdziemy do takich konstrukcji, poznamy sposób konstrukcji kąta przystającego do danego (czyli kąta o takiej samej mierze).

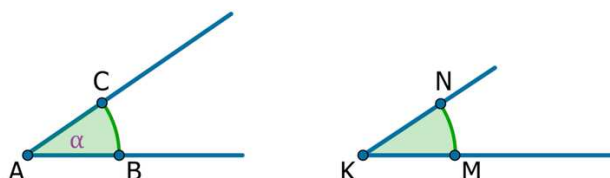
Przykład 6

Dany jest kąt α . Skonstruujemy kąt przystający do tego kąta.

Opis konstrukcji

- Oznaczamy A – wierzchołek kąta α .
- Z punktu A kreślimy okrąg o dowolnym promieniu r .
- Oznaczamy: C, B – punkty przecięcia okręgu z ramionami kąta α .
- Rysujemy półprostą, która będzie ramieniem kąta przystającego do kąta α .
- Oznaczmy literą K początek tej półprostej.
- Z punktu K kreślimy okrąg o promieniu r .
- Oznaczamy: M – punkt przecięcia okręgu z półprostą.
- Z punktu M kreślimy okrąg o promieniu CB .
- Oznaczamy: N – punkt przecięcia otrzymanych okręgów.
- Rysujemy półprostą KN – jest to drugie ramię szukanego kąta.
- Kąt MKN jest kątem przystającym do kąta α .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowana jest konstrukcja kąta przystającego do kąta α .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RvarlqwRA0bmi>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_atrapa_animacja_217

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję kąta przystającego do danego kąta.

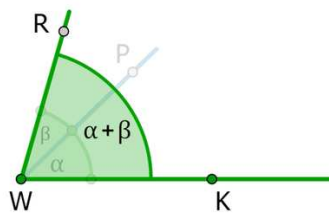
Przykład 7

Dane są kąty α , β . Skonstruujemy kąt, który będzie sumą kątów α i β .

Opis konstrukcji

- Rysujemy półprostą WK .
- Konstruujemy kąt przystający do kąta α tak, aby jego wierzchołkiem był punkt W , a jednym z jego ramion była półprosta WK .
- Na drugim ramieniu otrzymanego kąta zaznaczamy dowolny punkt P , różny od punktu W .
- Konstruujemy kąt przystający do kąta β o wierzchołku w punkcie W tak, aby półprosta WP była wspólnym ramieniem kątów α i β .
- Na drugim ramieniu kąta przystającego do kąta β obieramy dowolny punkt R – różny od punktu W .
- Kąt KWR jest sumą kątów α i β .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowana jest konstrukcja kąta, który jest sumą kątów α i β .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R5vWgVS5oMeVN>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję sumy kątów.

Przykład 8

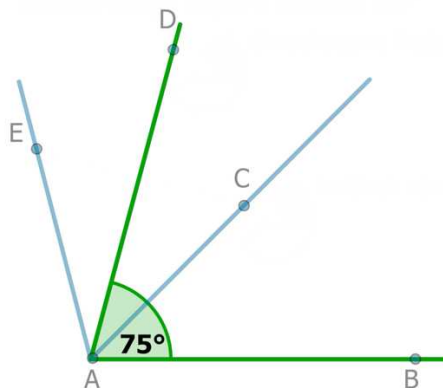
Skonstruujemy kąt o mierze 75° . Wykorzystajmy konstrukcję sumy kątów:

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ.$$

Opis konstrukcji

- Konstruujemy kąt BAC o mierze 45° .
- Konstruujemy kąt CAD o mierze 30° tak, aby kąt BAD był sumą kątów BAC i CAD .
- Kąt BAD jest sumą kątów o miarach 45° i 30° , jego miara jest równa 75° .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowana jest konstrukcja kąta o mierze 75° .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RBzgFXL1bIYns>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_kat 75

Animacja przedstawia konstrukcję kąta o mierze 75° .

Przykład 9

Dane są kąty α, β , gdzie $\alpha > \beta$. Skonstruujemy kąt, który będzie różnicą kątów α i β .

Opis konstrukcji

- Rysujemy półprostą WK .
- Konstruujemy kąt przystający do kąta α tak, aby jego wierzchołkiem był punkt W , a jednym z jego ramion była półprosta WK .
- Na drugim ramieniu otrzymanego kąta zaznaczamy dowolny punkt P , różny od punktu W .
- Konstruujemy kąt przystający do kąta β o wierzchołku w punkcie W tak, aby półprosta WK była wspólnym ramieniem kątów α i β .
- Na drugim ramieniu kąta przystającego do kąta β obieramy dowolny punkt R – różny od punktu W .
- Kąt RWP jest różnicą kątów α i β .

Przykład 10

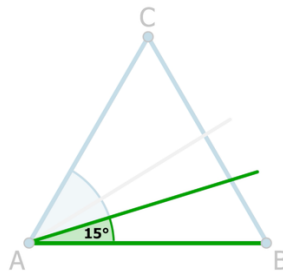
Skonstruujemy kąt o mierze 15° . Wykorzystajmy konstrukcję różnicy kątów:

$$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ.$$

Opis konstrukcji

- Konstruujemy kąt BAC o mierze 60° .
- Konstruujemy kąt CAD o mierze 45° tak, aby kąt BAD był różnicą kątów BAC i CAD .
- Kąt BAD jest różnicą kątów o miarach 60° i 45° , jego miara jest równa 15° .

Zapoznaj się z poniższą animacją, w której zaprezentowane są dwa sposoby konstruowania kąta o mierze 15° .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RlagjBmnbXgiZ>

Dział III_Konstrukcje kątów o miarach 30 45 60_2236

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

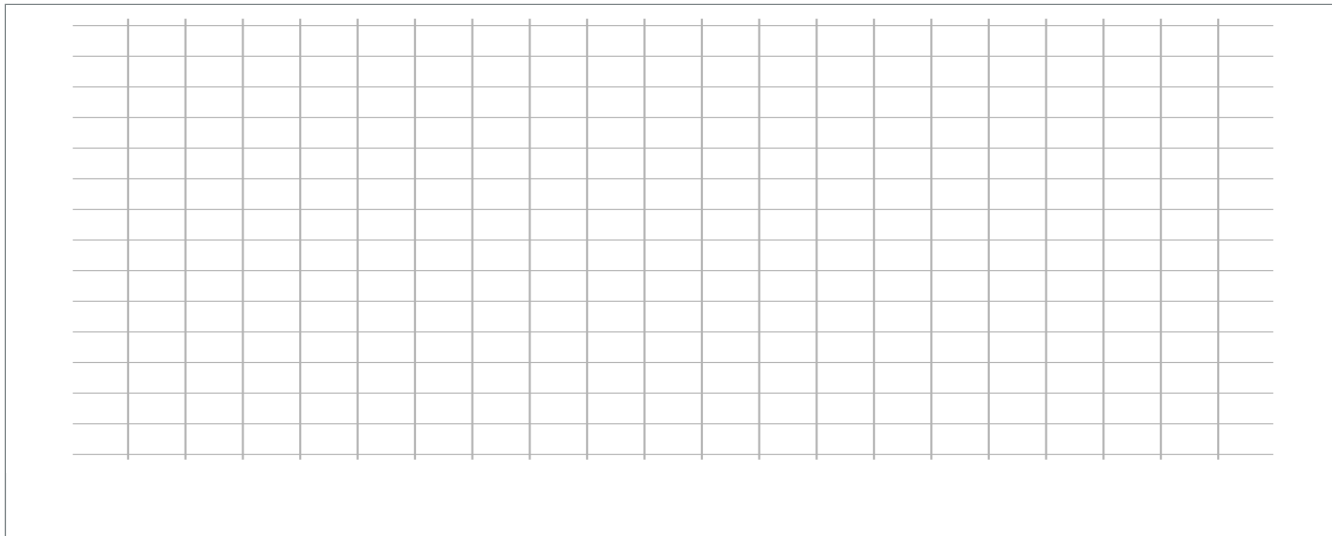
Animacja przedstawia konstrukcję kąta o mierze 15° .

Ćwiczenie 1



Skonstruuj kwadrat, którego

1. bok ma długość 4 cm,
2. obwód jest równy 12 cm.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Odpowiedz na pytanie.

W jaki sposób, mając narysowany kwadrat, można uzyskać kąt o mierze 45° ?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

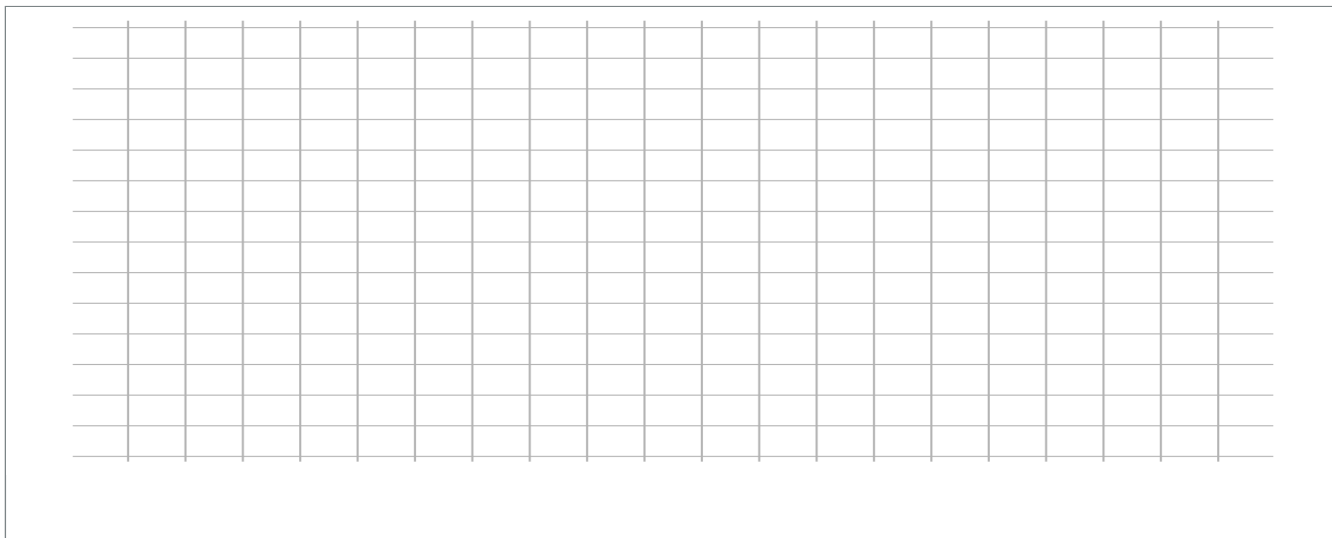


Skonstruuj trójkąt równoboczny o boku długości

1. $3,5\text{ cm}$,

2. 4 cm ,

3. x .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

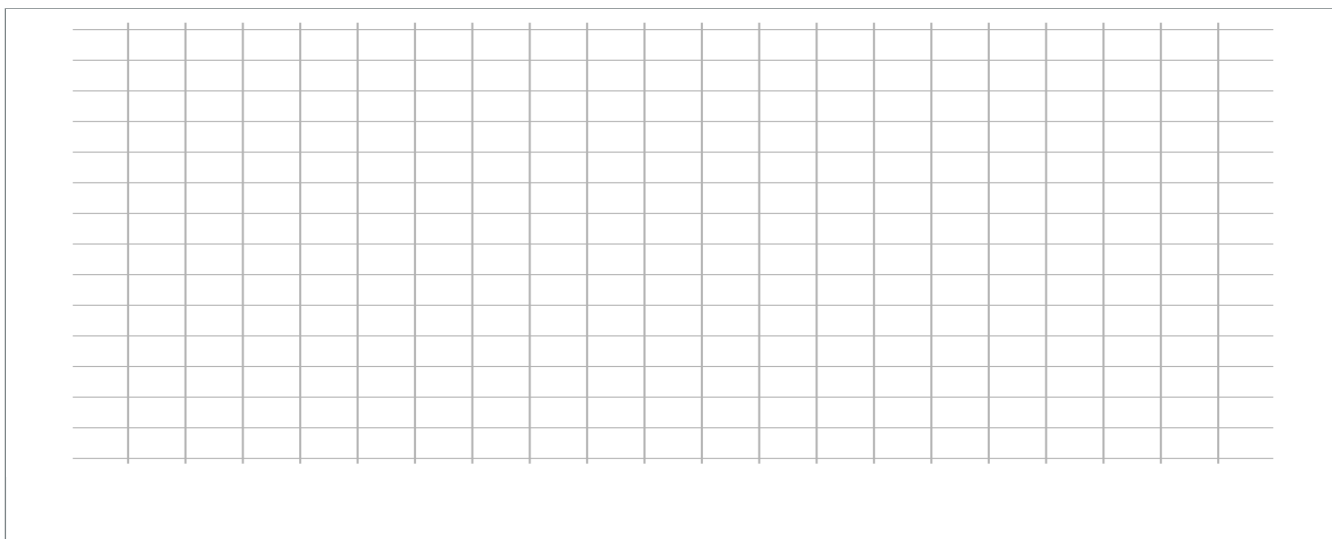


Dany jest kąt o mierze 90° i kąt o mierze 60° . Skonstruuj kąt

1. $\alpha = 150^\circ$,

2. $\beta = 30^\circ$,

3. $\gamma = 120^\circ$.



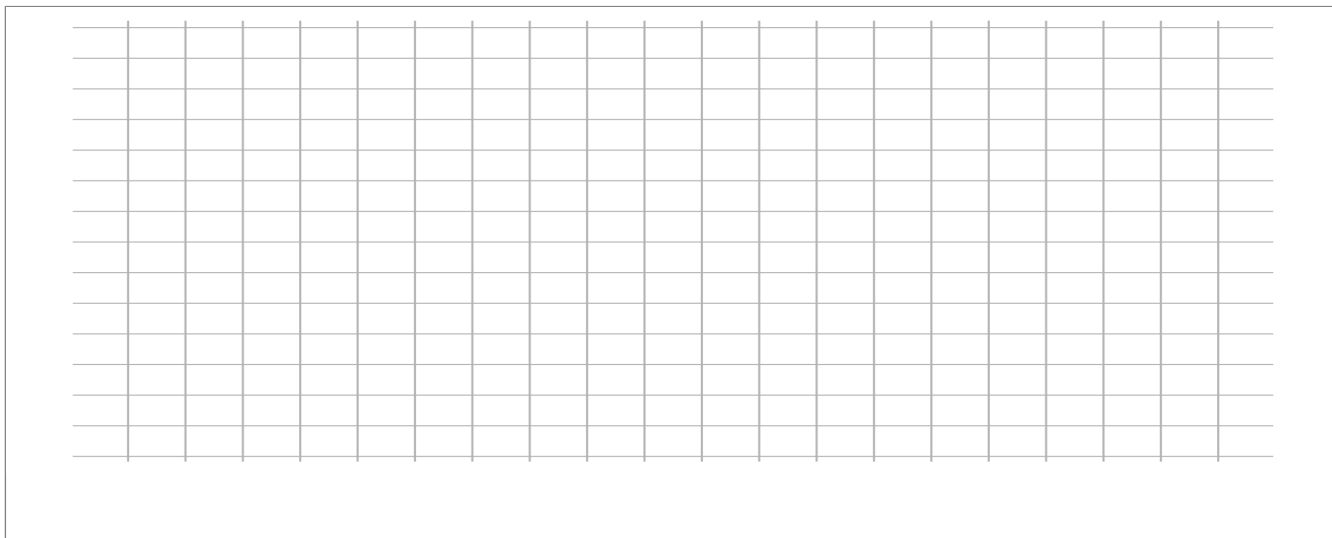
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Skonstruuj trójkąt

1. prostokątny równoramienny,
2. prostokątny, którego kąty ostre mają miary 30° i 60° ,
3. którego jeden z kątów ma miarę 120° .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Dwusieczna dzieli kąt o mierze 60° na kąt o mierze 40° i kąt o mierze 20° .
- ☐ Istnieje trójkąt, w którym miara każdego z kątów jest mniejsza od 60° .
- ☐ Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne, w których miara każdego z kątów ostrych jest równa 45° .

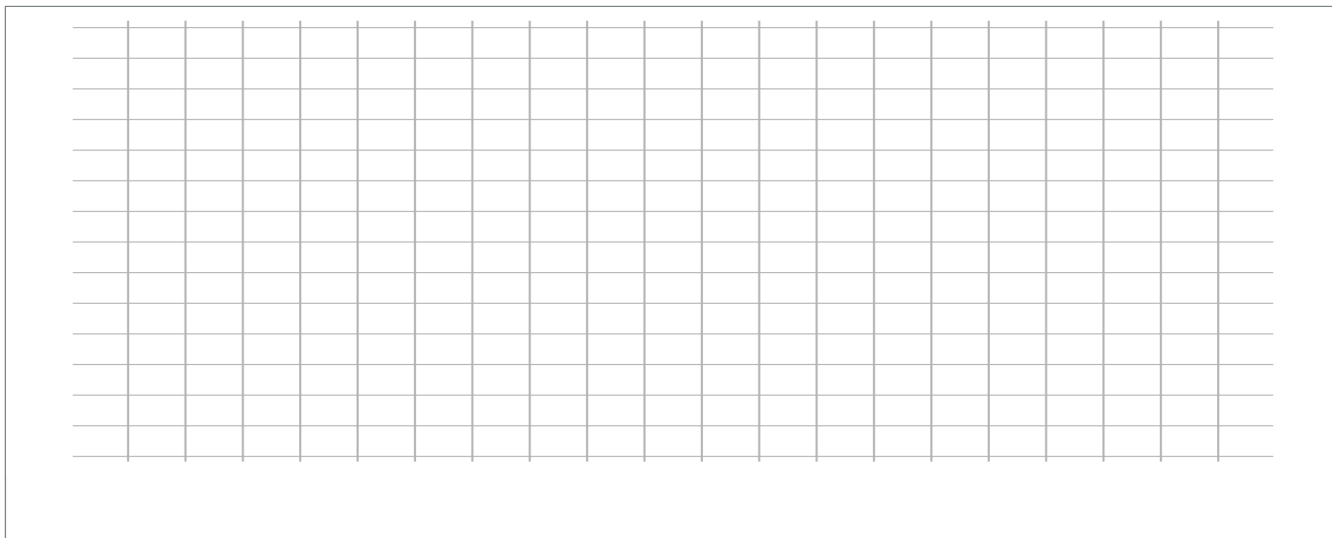
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Narysuj trójkąt równoboczny. Skonstruuj kąt $\alpha = 30^\circ$, korzystając z własności

1. symetralnej boku trójkąta,
2. wysokości trójkąta.



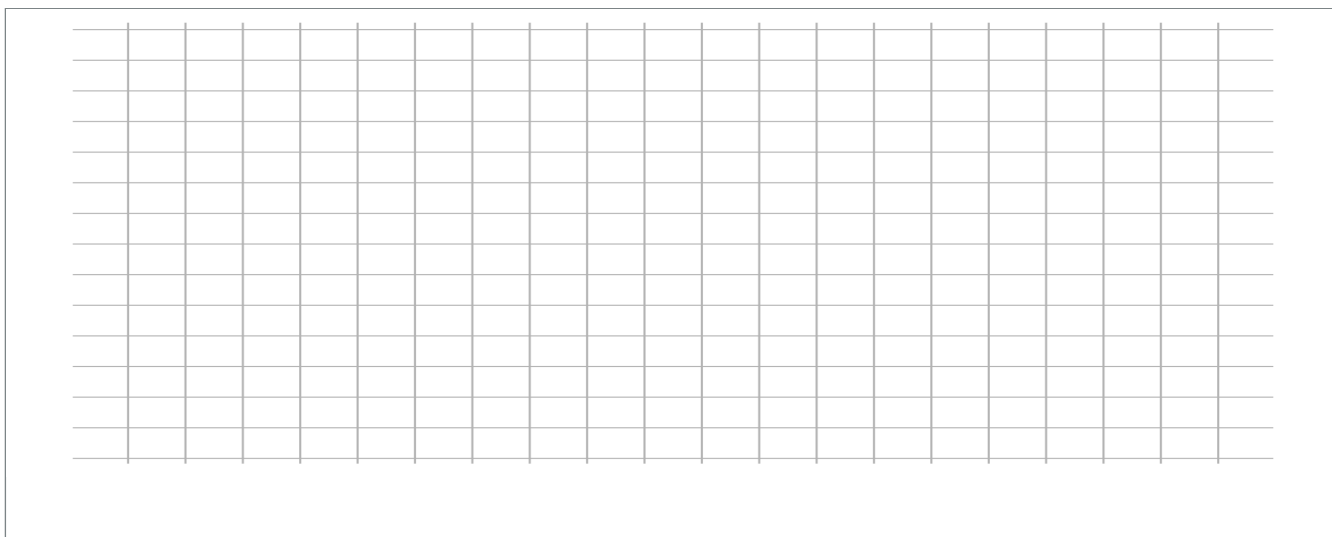
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Narysuj trójkąt równoboczny. Skonstruuj kąt $\alpha = 120^\circ$, korzystając z

1. własności kątów przyległych,
2. sumy odpowiednich kątów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

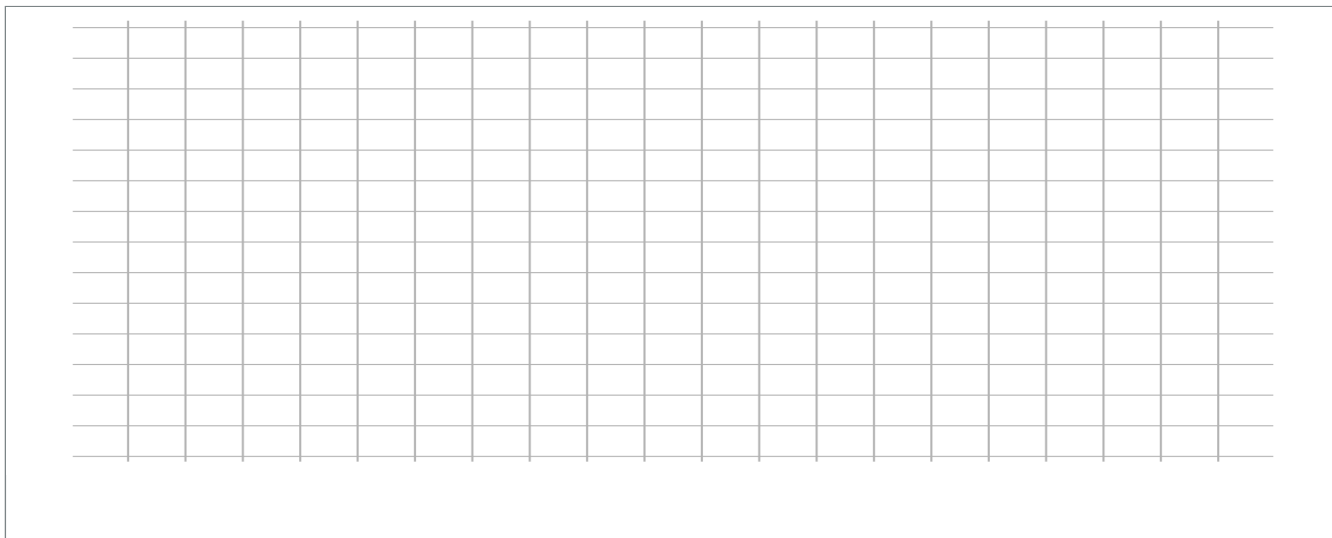


Skonstruuuj kąt

1. $\beta = 270^\circ$,

2. $\gamma = 30^\circ$,

3. $\alpha = 15^\circ$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

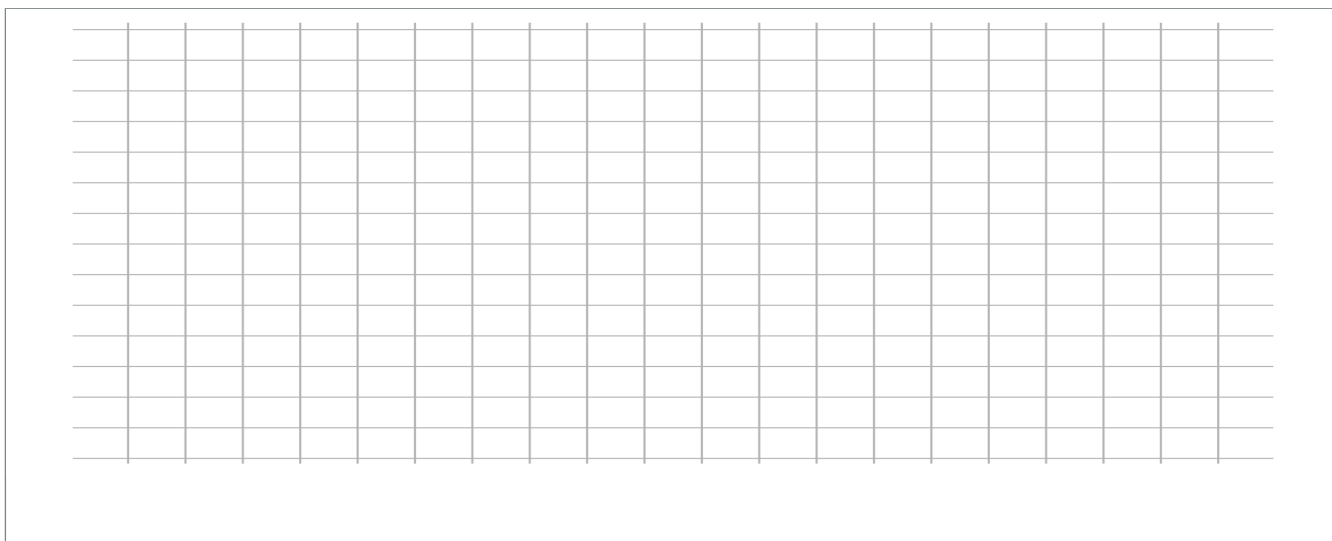
Ćwiczenie 10



Skonstruuuj

1. dowolny trójkąt równoramienny,

2. trójkąt o bokach długości 3 cm, 3 cm, 4 cm.

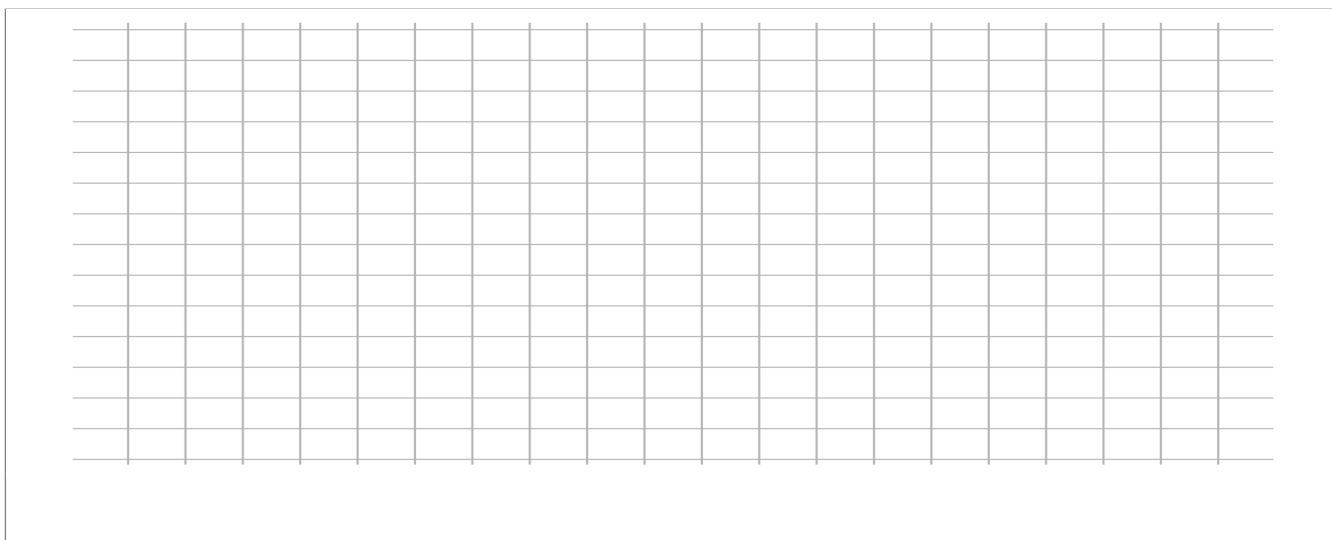


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Zbuduj trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm, w którym kąt między ramionami ma miarę 60° .

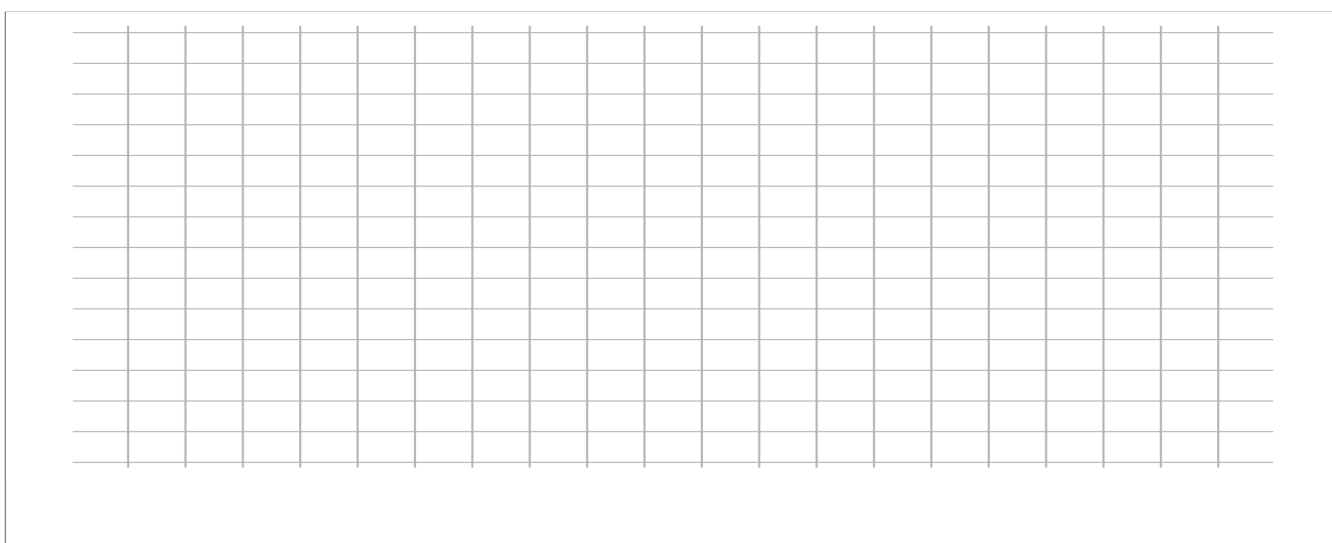


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Zbuduj dowolny trójkąt prostokątny, w którym miary kątów ostrych pozostają w stosunku 1 : 2.



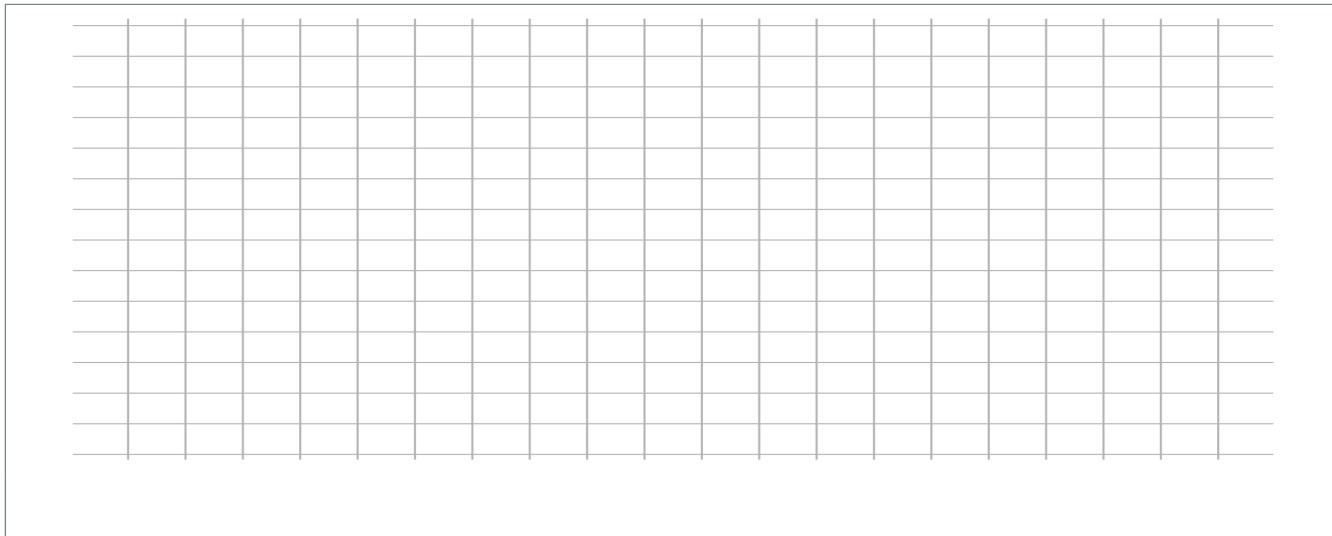
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Zbuduj romb

1. o boku długości 5 cm i kącie ostrym 60° ,
2. o boku długości a .

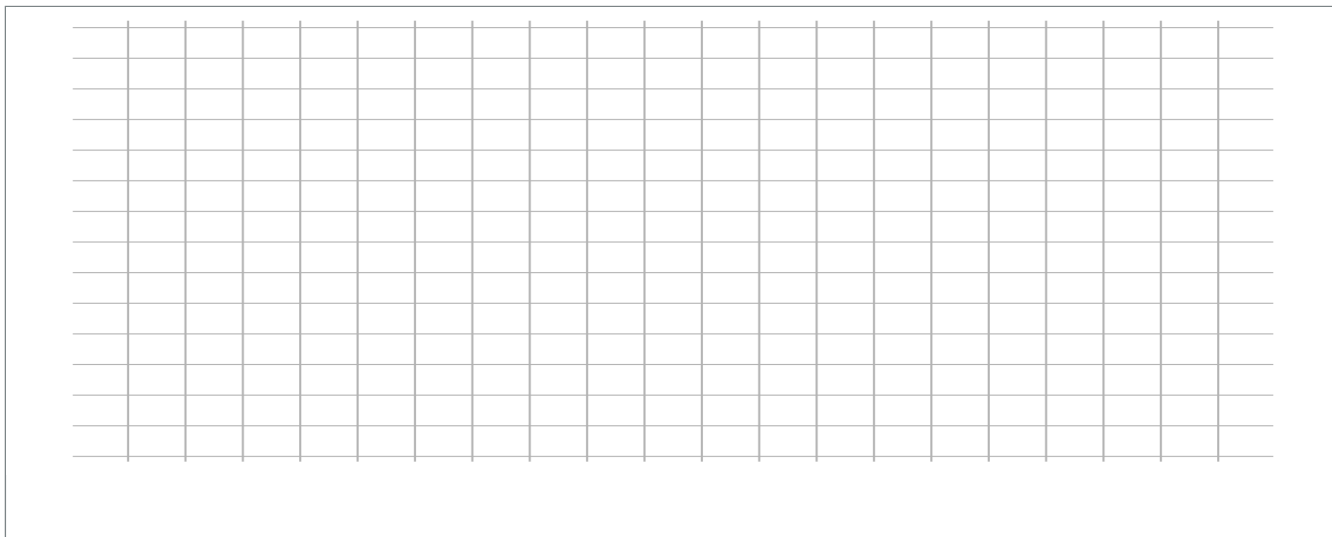


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Zbuduj trójkąt równoboczny, w którym wysokość ma długość 15 cm.

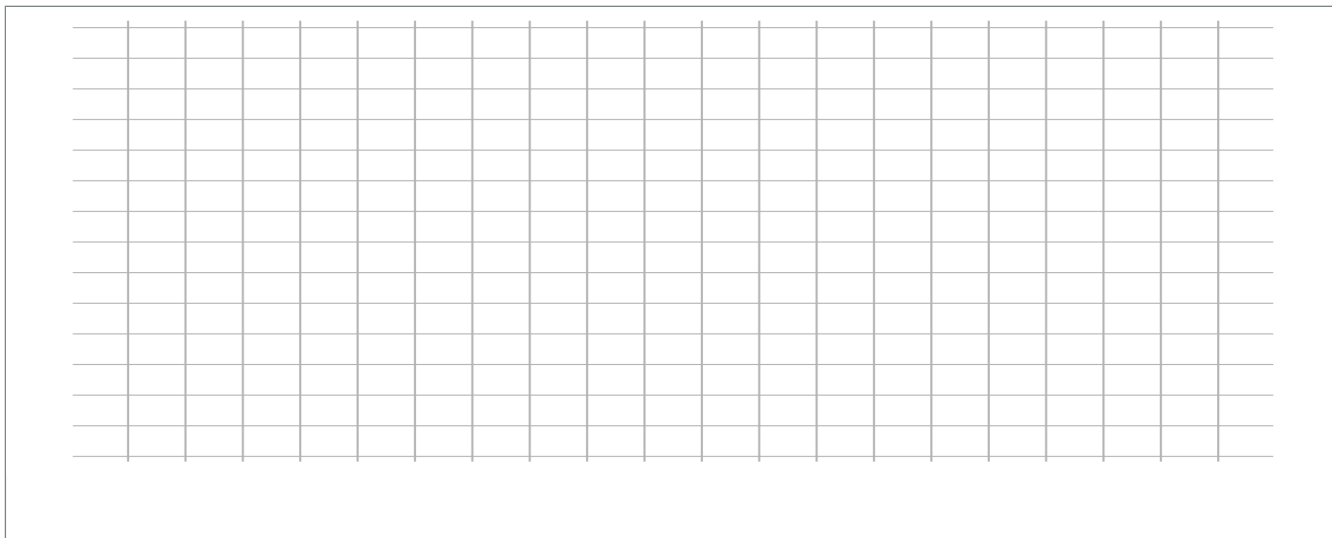


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Skonstruuj trójkąt równoramienny ABC , wiedząc, że miara kąta przy wierzchołku A wynosi 60° , a długość dwusiecznej tego kąta zawartej w trójkącie jest równa 8 cm.

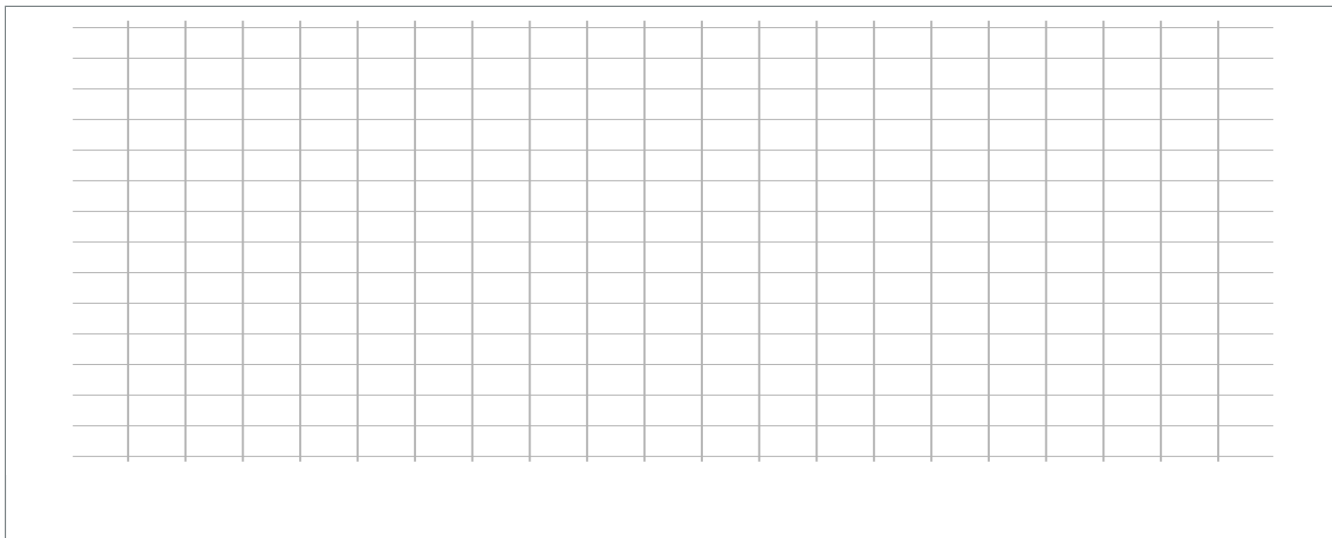


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Zbuduj trapez, wiedząc, że jedna z jego podstaw ma długość 4 cm i kąty przy tej podstawie mają miary 60° i 45° .



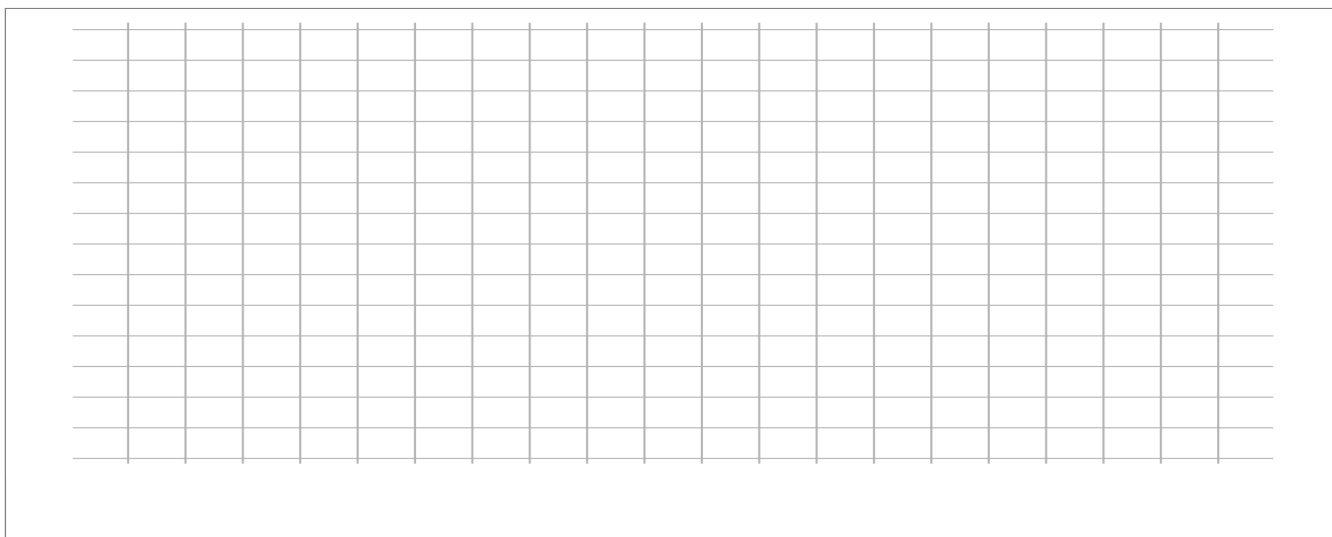
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Dane są kąty α i β , gdzie $\beta < \alpha$. Skonstruuj kąt

1. 2α ,
2. 3α ,
3. $\alpha - \beta$.



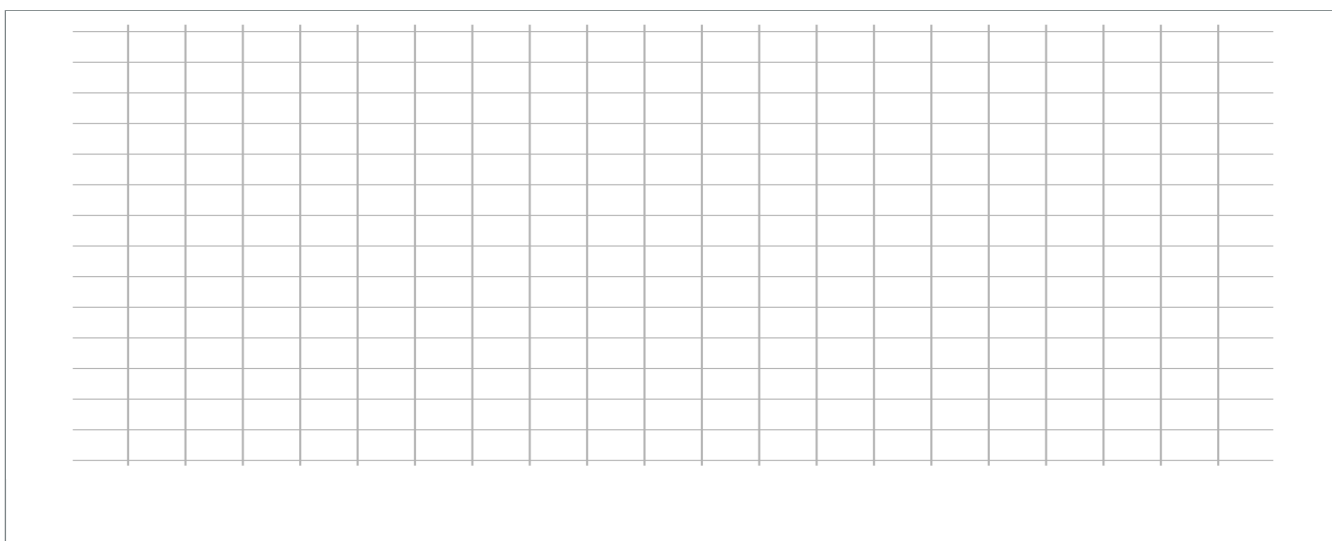
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Zbuduj trapez

1. prostokątny,
2. równoramienny o kątach α oraz 2α .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.