
# Rozwiązywanie nierówności zawierających mianownik


- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

# Rozwiązywanie nierówności zawierających mianownik


Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Rozwiązywanie nierówności nie zawsze można sprowadzić do prostego porównywania dwóch wielkości. Czasami nierówności zawierają ułamki i wtedy rozwiązanie jest znacznie bardziej skomplikowane.

**Twoje cele**

- Sprowadzisz wyrażenia algebraiczne zawierające mianowniki do wspólnego mianownika.
- Rozwiążesz nierówności zawierające mianownik metodą nierówności równoważnych.
- Zapiszesz i rozwiążesz nierówności zawierające mianowniki, wynikające z treści zadań.

# Przeczytaj

**Przykład 1**

Rozwiążemy nierówność:

$$\frac{2x}{3} - 1 > \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{4}$$

Obie strony nierówności mnożymy przez wspólny mianownik ułamków (najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $3$, $4$ i $6$). Będzie to liczba $12$.

$$\frac{2x}{3} - 1 > \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{4} \ \Big| \cdot 12$$

$$12 \cdot \frac{2x}{3} - 12 \cdot 1 > 12 \cdot \frac{x+1}{6} - 12 \cdot \frac{x-2}{4}$$

Skracamy wyrażenia.

$$4 \cdot 2x - 12 \cdot 1 > 2 \cdot (x+1) - 3 \cdot (x-2)$$

Wykonujemy mnożenie i pozbywamy się nawiasów. Pamiętamy, że mnożąc przez liczbę ujemną zmieniamy wszystkie znaki w nawiasie na przeciwne.

$$8x - 12 > 2x + 2 - 3x + 6$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$8x - 12 > -x + 8$$

Do obydwu stron nierówności dodajemy $12$ i jednocześnie dodajemy $x$.

$$8x + x > 8 + 12$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$9\,x > 20 \ | : \ 9$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $9$.

$$x > \frac{20}{9}$$

Wyłączamy całości z ułamka niewłaściwego.

$$x > 2\frac{2}{9}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left(2\frac{2}{9},\ \infty\right)$.

**Przykład 2**

Dla jakich naturalnych wartości $x$, wartość wyrażenia $\frac{x}{2} + \frac{2x-1}{3}$ jest nie większa od wartości wyrażenia $1 - \frac{x-3}{3}$?

Najpierw zapiszemy nierówność opisującą warunki zadania. Pamiętajmy, że stwierdzenie „nie większa” oznacza, że wartość pierwszego wyrażenia musi być mniejsza od wartości drugiego wyrażenia lub równa tej wartości.

$$\frac{x}{2} + \frac{2x-1}{3} \leq 1 - \frac{x-3}{3}$$

Obydwie strony nierówności mnożymy przez wspólny mianownik ułamków (najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 2 i 3). Będzie to liczba 6.

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{2x-1}{3} \leq 6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{x-3}{3}$$

$$3x + 2(2x-1) \leq 6 - 2(x-3)$$

Następnie rozwiązujemy nierówność metodą nierówności równoważnych.

$$3x + 4x - 2 \leq 6 - 2x + 6$$

$$7x - 2 \leq 12 - 2x$$

$$7x + 2x \leq 12 + 2$$

$$9x \leq 14$$

$$x \leq \frac{14}{9}$$

$$x \leq 1\frac{5}{9}$$

Ponieważ $x$ ma być liczbą naturalną, więc zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $x \in \{0,\ 1\}$.

**Przykład 3**

Jeżeli do siódmej części pewnej liczby naturalnej $x$, pomniejszonej o $3$, dodamy $2$, to otrzymamy nie więcej niż połowę tej liczby. Jaka najmniejsza liczba całkowita spełnia tę nierówność?

Zapiszemy nierówność opisującą warunki zadania.

$$\frac{x-3}{7}+2\leq\frac{x}{2}$$

Obydwie strony nierówności mnożymy przez wspólny mianownik ułamków (najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $7$ i $2$). Będzie to liczba $14$.

$$14\cdot\frac{x-3}{7}+14\cdot 2\leq 14\cdot\frac{x}{2}$$

$$2(x-3)+28\leq 7x$$

$$2x-6+28\leq 7x$$

$$2x+22\leq 7x$$

$$2x-7x\leq -22$$

$$-5x\leq -22$$

$$x\geq\frac{22}{5}$$

$$x\geq 4\frac{2}{5}$$

Zatem najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność jest liczba $5$.

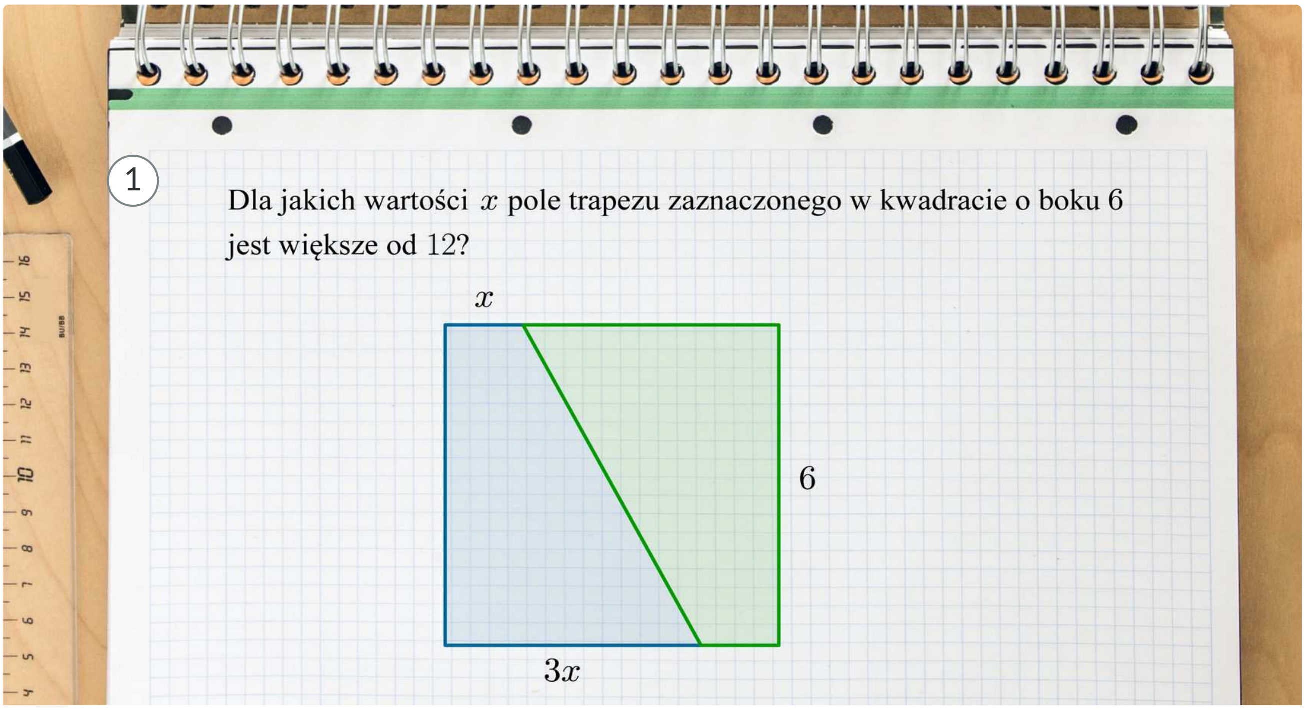
## Słownik

**zbiór rozwiązań nierówności z jedną niewiadomą**

każda liczba rzeczywista, która spełnia tę nierówność

# Galeria zdjęć interaktywnych

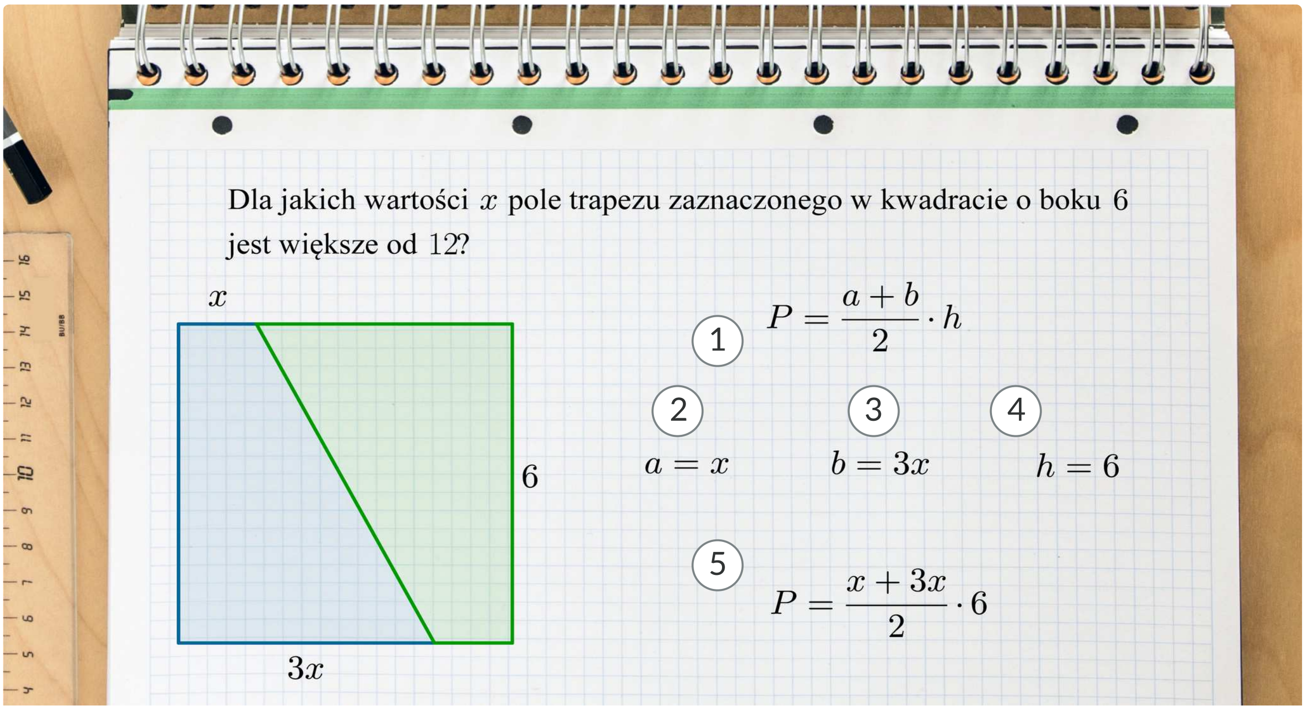
> **Polecenie 1**
> Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj samodzielnie rozwiązać podany przykład. Sprawdź poprawność Twojego rozwiązania z rozwiązaniem przedstawionym na interaktywnych zdjęciach. Przeczytaj wskazówki umieszczone na slajdach.




1

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Obliczymy dla jakich wartości $x$ pole trapezu zaznaczonego w kwadracie o boku $6$ jest większe od $12$.




## 1

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR
Przypomnimy najpierw wzór na pole trapezu:

## 2

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Górna podstawa trapezu ma długość $x$.

## 3

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Dolna podstawa trapezu ma długość $3x$.

## 4

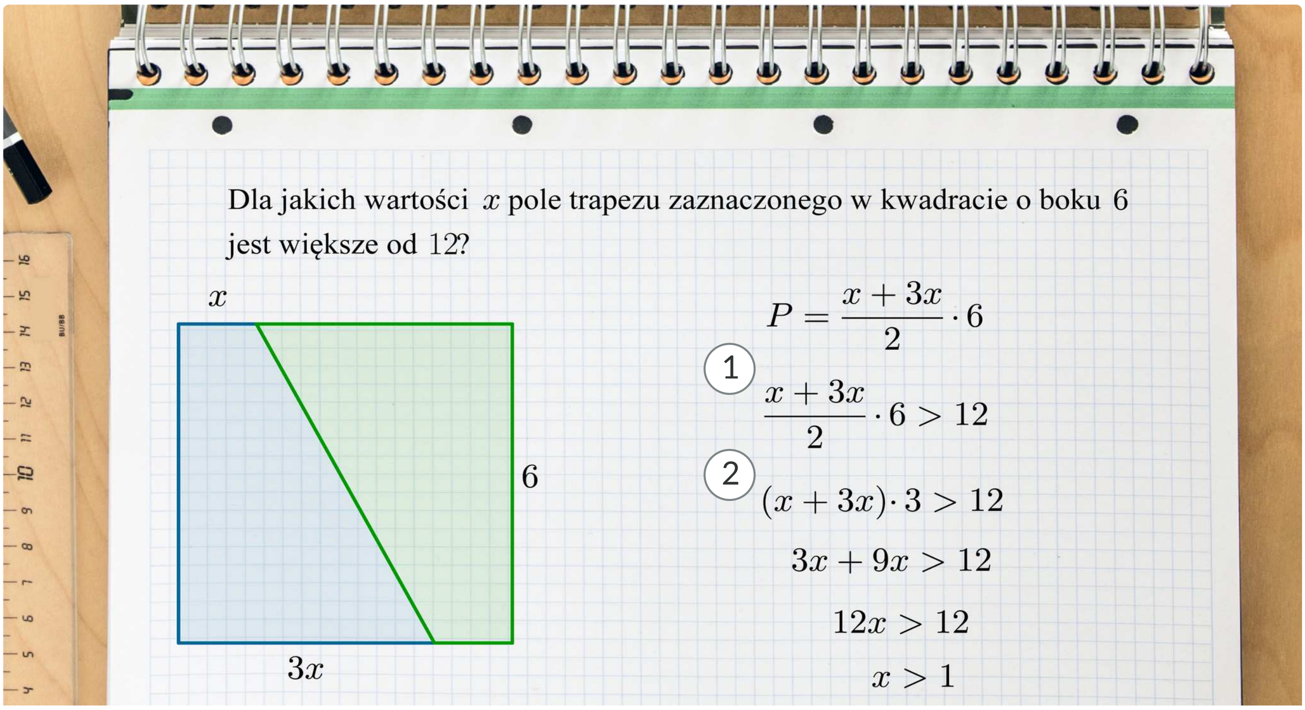
Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Wysokość trapezu ma długość $6$.

## 5

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Zatem wzór na pole trapezu zaznaczonego w kwadracie ma postać:




## 1

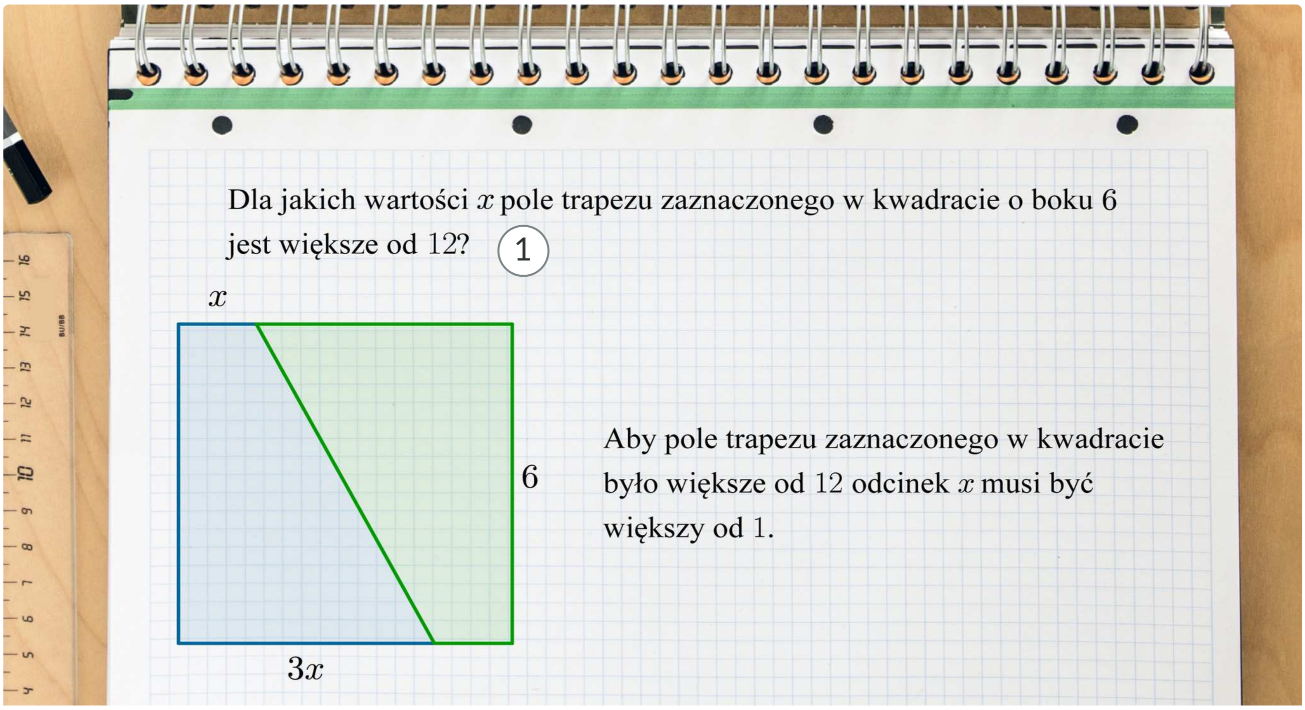
Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Pole trapezu ma być większe od $12$.

## 2

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

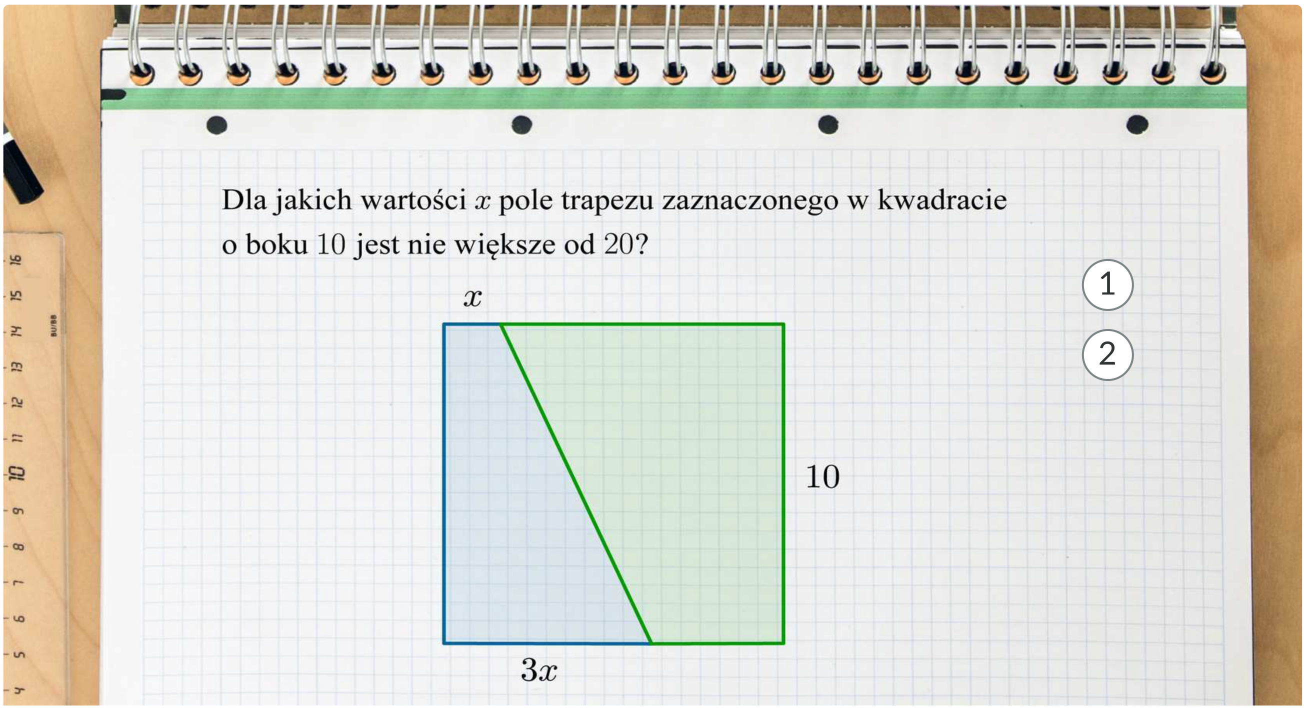
Skracamy przez $2$.




1

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

Aby pole trapezu zaznaczonego w kwadracie było większe od 12, odcinek $x$ musi być większy od 1.




1

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR

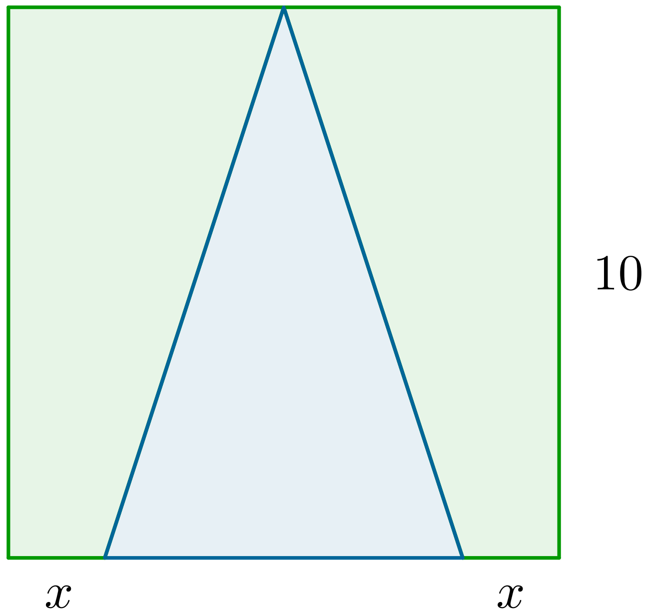
Dla jakich wartości $x$ pole trapezu zaznaczonego w kwadracie o boku $10$ jest nie większe od $20$. Spróbuj podać długości podstaw trapezu i wyrazić jego pole w zależności od $x$.

## 2

Nagranie dostępne pod adresem https://zpe.gov.pl/b/Pd6MKwFPR
Zapisz i rozwiąż nierówność.

**Polecenie 2**

Dla jakich wartości $x$ pole trójkąta zaznaczonego w kwadracie o boku $10$ jest mniejsze od $30$?



# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

Która liczba spełnia nierówność $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x < 1$ ? Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

- [ ] $2\frac{1}{5}$
- [ ] $1 - 2\sqrt{3}$
- [ ] $2\frac{2}{5}$
- [ ] $\sqrt{2}$
- [ ] $3$
- [ ] $-2\frac{2}{5}$

### Ćwiczenie 2

Nierówność $\frac{7-3x}{6} < -\frac{1}{2}x + 1$ jest:

- tożsamościowa
- sprzeczna

## Ćwiczenie 3

Przeciągnij w odpowiednie miejsce taką liczbę, aby dana nierówność była sprzeczna.

$\frac{3x-6}{3} \leq \frac{2(x-4)}{2} - \boxed{\phantom{00}}$

$-4$ $-3$ $-1$ $-2$

## Ćwiczenie 4

Przeciągnij w odpowiednie miejsce taką liczbę, aby dana nierówność była tożsamościowa.

$\frac{4x-2}{2} \geq \frac{6(x-2)}{3} + \boxed{\phantom{00}}$

$2$ $4$ $3$ $5$ $6$

## Ćwiczenie 5

Wykaż, że każda liczba nie mniejsza od $-10$ spełnia nierówność $\frac{2x-1}{3} - \frac{x}{2} \geq \frac{x+1}{3} + 1$
.

## Ćwiczenie 6

Ułóż rozwiązanie nierówności w odpowiedniej kolejności.

- $4x - 16 > 18x - 3x + 6$
- $x < -2$
- $x < -\frac{22}{11}$
- $4x - 16 > 15x + 6$
- $-11x > 22$
- $4(x-4) > 18x - 3(x-2)$
- $4x - 15x > 6 + 16$
- $\frac{x-4}{3} > \frac{3x}{2} - \frac{x-2}{4}$

## Ćwiczenie 7

Trzecia część liczby $y$ jest nie większa od $30\%$ podwojonej liczby $y$. Zbiór rozwiązań nierówności to wszystkie liczby

- [ ] niedodatnie
- [ ] nieujemne
- [ ] dodatnie
- [ ] większe od $4$
- [ ] większe lub równe $0$

## Ćwiczenie 8

Połącz w pary nierówność z jej rozwiązaniem.

| | |
|---|---|
| $\frac{2x+4}{5} - \frac{x-1}{2} < 0$ | $x < 2\frac{1}{2}$ |
| $\frac{2x-1}{2} - x > \frac{x-4}{3}$ | $x > 13$ |
| $-\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > 0$ | $x < 0$ |
| $\frac{x+2}{2} - \frac{3x}{4} < 4$ | $x < -\frac{3}{11}$ |
| $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} > 2x$ | $x > -12$ |

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Rozwiazywanie nierówności zawierających mianownik**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- sprowadza wyrażenia algebraiczne zawierające mianownik do wspólnego mianownika
- rozwiązuje nierówności zawierające mianownik metodą nierówności równoważnych
- zapisuje i rozwiązuje nierówności zawierające mianownik, wynikające z treści zadań
- analizuje sytuację problemową i dobiera odpowiedni algorytm do jej rozwiązania

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych
- dyskusja
- odwrócona klasa

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

**Przebieg lekcji**

**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi, aby uczniowie w domu przypomnieli sobie sposoby rozwiązywania równań zawierających mianowniki.

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych nierówności zawierających mianownik, np. $\frac{x}{4} \geq 3$. Pozostali podają przykłady liczb, należących do zbioru rozwiązań nierówności.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania równań zawierających mianownik, które przypomnieli w domu. Przypominają metody sprowadzania ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
3. Uczniowie oglądają grafikę interaktywną i omawiają ją wraz z nauczycielem.

**Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania nierówności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

**Praca domowa:**

Rozwiązanie zadania zawartego w galerii zdjęć interaktywnych.

**Materiały pomocnicze:**

- Rozwiązywanie równań zawierających mianownik metodą równań równoważnych

**Wskazówki metodyczne:** przykłady, zawarte w w galerii  zdjęć interaktywnych uczniowie mogą samodzielnie przeanalizować w domu.