



## Kąty między odcinkami w stożku

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Kąty między odcinkami w stożku

Źródło: Becky Fantham, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W każdej bryle geometrycznej istnieją szczególne odcinki, które charakteryzują jej rozmiar. W stożku wyróżnia się promień podstawy, wysokość oraz tworzącą. Istnieje ciekawa zależność pomiędzy tymi odcinkami. Długość wysokości stożka zależy od kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy.



Źródło: dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com), domena publiczna.

W materiale skupimy uwagę na kątach, jakie występują w stożku pomiędzy tymi odcinkami. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Rozpoznaś kąty między odcinkami w stożku.
- Użyjesz funkcji trygonometrycznych do wyznaczania miar kątów między odcinkami w stożku.
- Wykorzystasz wartości miar kątów między odcinkami w stożku do wyznaczania długości tych odcinków.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

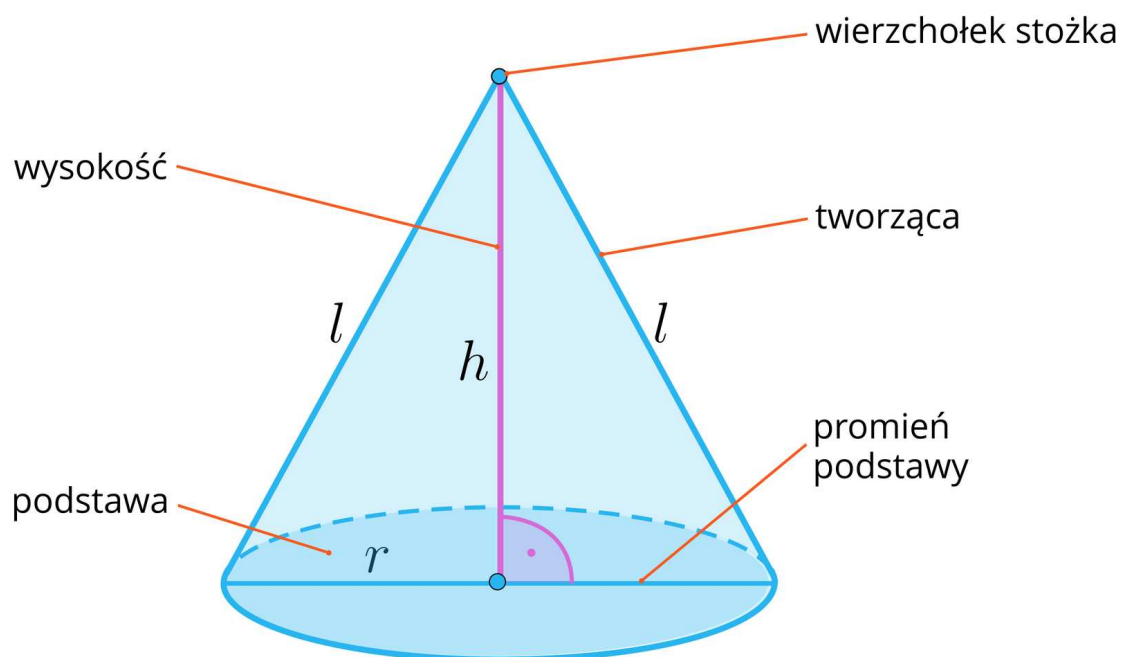
# Przeczytaj

Przypomnijmy definicję [stożka](#).

## Definicja: Stożek

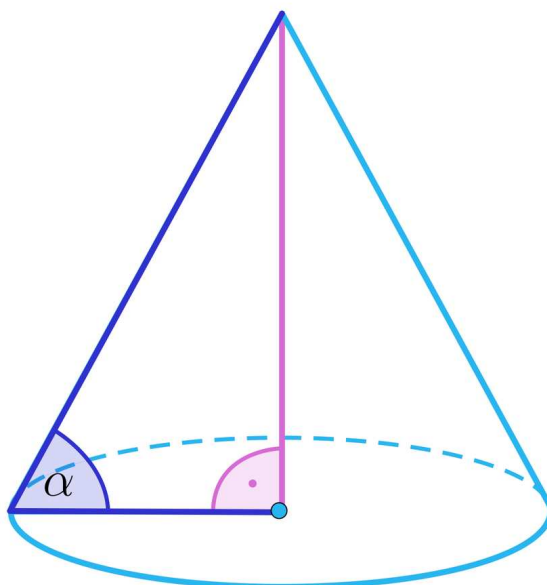
Stożek to bryła obrotowa, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła osi, będącej przyprostokątną tego trójkąta.

Na poniższym rysunku przedstawiono elementy budowy stożka.

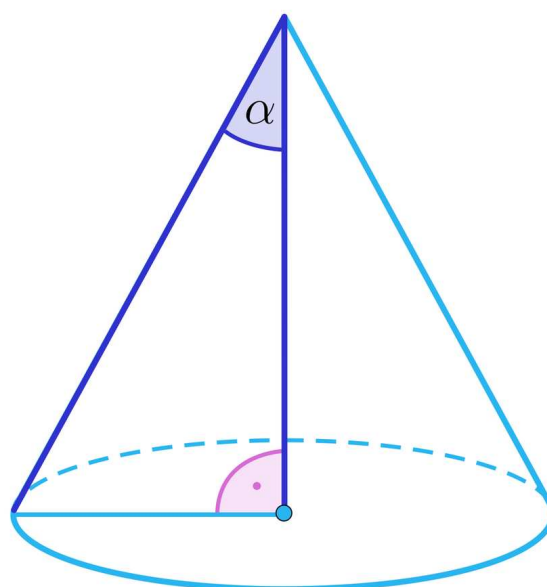


Wyróżniamy kilka różnych kątów między odcinkami w stożku:

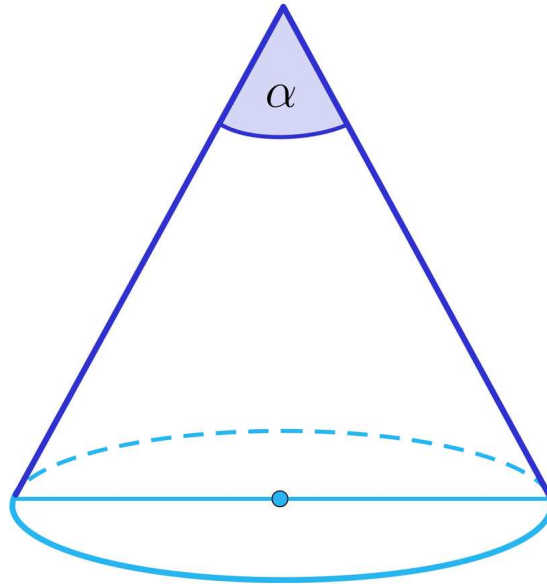
- kąt pomiędzy tworzącą a promieniem stożka



- kąt pomiędzy wysokością a tworzącą stożka



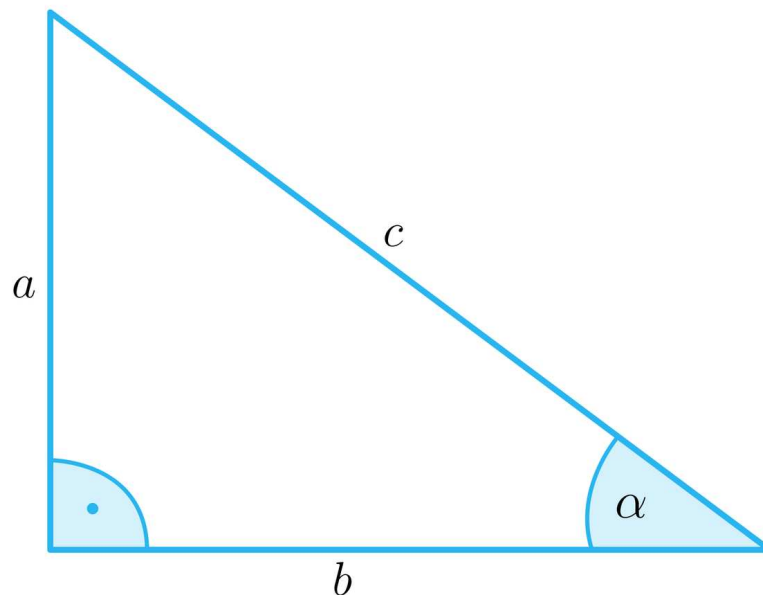
- kąt rozwarcia stożka (kąt pomiędzy ramionami trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka)



Do wyznaczania miar tych kątów będziemy używać definicję oraz tablicę wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus i tangens.

### Już wiesz

Jeżeli trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości  $a$  i  $b$  oraz przeciwprostokątną długości  $c$ , to funkcje trygonometryczne kąta  $\alpha$  z rysunku przedstawiają się następująco:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

W obliczeniach będziemy wykorzystywać wzory na pole powierzchni całkowitej i objętość stożka:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

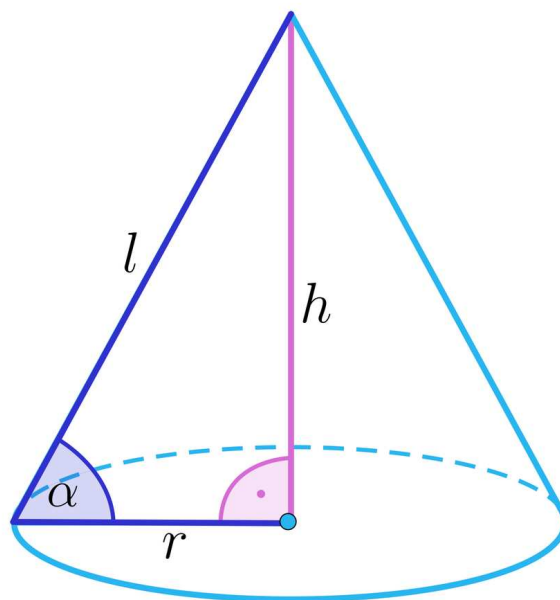
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

### Przykład 1

Wyznamy kąt między tworzącą stożka a promieniem podstawy, jeżeli pole podstawy stożka wynosi  $28\pi$ , a objętość  $56\pi$ .

### Rozwiązanie:

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Jeżeli pole podstawy stożka wynosi  $28\pi$ , to do wyznaczenia długości promienia podstawy  $r$  rozwiązujemy równanie:

$$\pi r^2 = 28\pi$$

$$r^2 = 28$$

$$r = 2\sqrt{7}$$

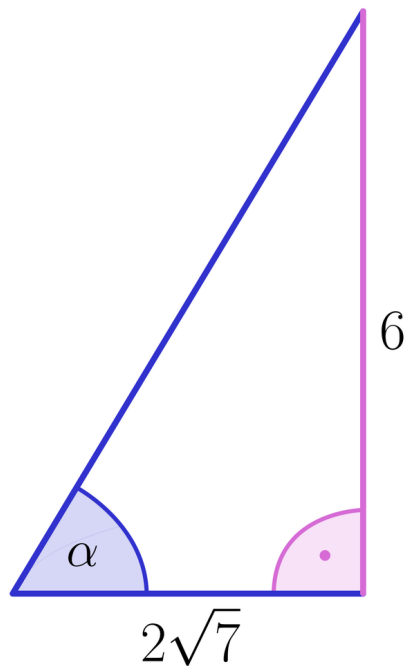
Do wyznaczenia długości wysokości stożka rozwiązujemy równanie, korzystając ze wzoru na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$56\pi = \frac{1}{3} \cdot 28\pi \cdot h$$

$$h = 6.$$

Otrzymujemy trójkąt prostokątny o wymiarach, jak na rysunku:



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznej tangens mamy, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ .

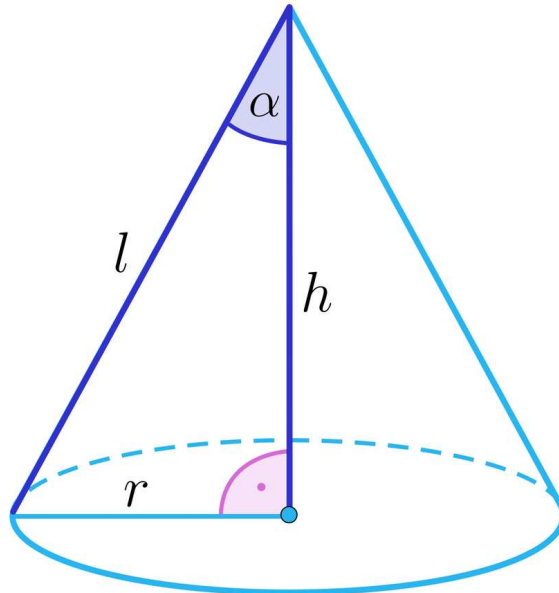
Zatem  $\alpha \approx 53^\circ$ .

### Przykład 2

Promień podstawy, wysokość oraz tworząca stożka w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 8. Wyznamy miarę kąta pomiędzy wysokością a tworzącą tego stożka.

### Rozwiązanie:

Narysujmy stożek i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Jeżeli promień podstawy, wysokość oraz tworząca stożka w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 8, to:

$$h = r + 8,$$

$$l = r + 16.$$

Zatem:

$$r^2 + (r + 8)^2 = (r + 16)^2$$

$$r^2 + r^2 + 16r + 64 = r^2 + 32r + 256$$

$$r^2 - 16r - 192 = 0$$

$$r_1 = \frac{16-32}{2} = -8 < 0,$$

$$r_2 = \frac{16+32}{2} = 24 > 0.$$

$$\text{Zatem } r = 24, h = 32, l = 40.$$

Jeżeli wykorzystamy funkcję trygonometryczną sinus, to  $\sin \alpha = \frac{24}{40} = 0,6$ .

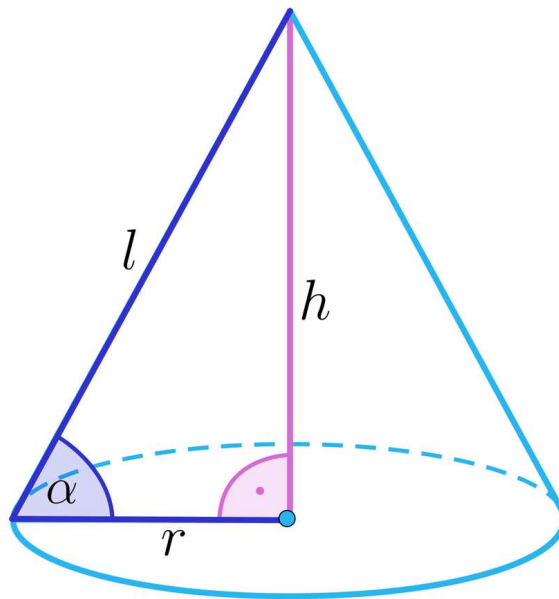
Wobec tego  $\alpha \approx 37^\circ$ .

### Przykład 3

Wyznamy miarę kąta pomiędzy tworzącą stożka a promieniem podstawy, jeżeli objętość stożka jest równa  $30\pi$  a pole podstawy stożka wynosi  $25\pi$ .

**Rozwiązanie:**

Narysujmy stożek, zaznaczmy kąt i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Jeżeli  $V = 8\pi$  oraz  $P_p = 25\pi$ , to do wyznaczenia długości promienia podstawy oraz wysokości stożka rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \pi r^2 = 25\pi \\ \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 30\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ h = 3,6 \end{cases}$$

Zatem tangens rozpatrywanego kąta wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3,6}{5} = 0,72.$$

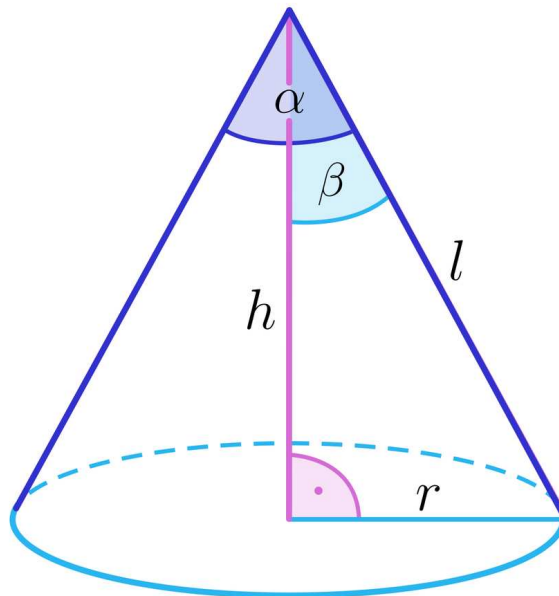
Wobec tego  $\alpha \approx 36^\circ$ .

#### Przykład 4

Wiadomo, że pole powierzchni bocznej stożka jest czterokrotnie większe od pola jego podstawy. Wyznamy kąt rozwarcia stożka.

#### Rozwiązanie:

Narysujmy stożek i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Wiadomo, że  $P_b = 4 \cdot P_p$ , zatem:

$$\pi r \cdot l = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Wobec tego  $\sin \beta = \frac{r}{l} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4} = 0,25$ , zatem  $\beta \approx 15^\circ$ .

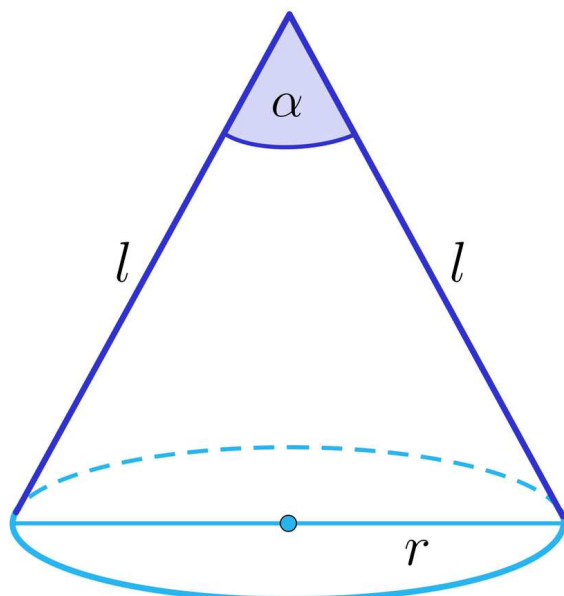
Ponieważ  $\alpha = 2\beta$ , zatem  $\alpha \approx 30^\circ$ .

### Przykład 5

Obliczmy miarę kąta rozwarcia stożka, w którym promień podstawy ma długość 8, a tworząca długość 10.

#### Rozwiązanie:

Narysujmy stożek, zaznaczmy odpowiedni kąt oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Z zadania wiadomo, że  $r = 8$  oraz  $l = 10$ . Do wyznaczenia miary kąta użyjemy twierdzenia cosinusów.

Zatem:

$$(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos \alpha$$

$$16^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$$

$$256 = 100 + 100 - 200 \cdot \cos \alpha$$

$$56 = -200 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{56}{200} = -\frac{7}{25} = -0,28.$$

Jeżeli skorzystamy z zależności  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  dla  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ , to  $\alpha \approx 106^\circ$ .

## Słownik

### stożek

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół przyprostokątnej

### twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku równa się sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwójny iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1


Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

---

## Polecenie 2

Kąt rozwarcia stożka ma miarę  $120^\circ$ , zaś pole powierzchni bocznej stożka jest równe  $12\sqrt{3}\pi$ . Oblicz objętość tego stożka.

# Sprawdź się

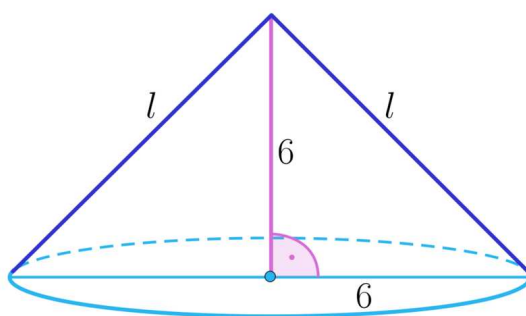
Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, w którym promień podstawy ma długość  $6$ , a tworząca długość  $8$ .



## Ćwiczenie 8



Kąt rozwarcia stożka ma miarę  $\alpha$ , a pole trójkąta o bokach  $l$ ,  $l$  i  $2r$ , gdzie  $l$  jest długością tworzącej stożka, a  $r$  długością promienia podstawy, jest równe  $S$ .

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Kąty między odcinkami w stożku

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastopów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony 2) wyznacza przekroje sześciangu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne::**

Uczeń:

- rozpoznaje kąty między odcinkami w stożku;
- używa funkcji trygonometrycznych do wyznaczania miar kątów między odcinkami w stożku;
- wykorzystuje miary kątów między odcinkami w stożku do wyznaczania długości tych odcinków;
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- metoda kota i myszy;
- burza mózgów.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Kąty między odcinkami w stożku”, nawiązuje do wiedzy uczniów z poprzednich lekcji. Przedstawia cel oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”; zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Bryły obrotowe - stożek](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie umiejętności w zakresie wyznaczania kątów między odcinkami w stożku.