



Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Źródło: sraone, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Dzięki twierdzeniu Pitagorasa umiemy znaleźć długość boku trójkąta znając długości pozostałych boków. Wiedząc, że suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° umiemy znaleźć miarę kąta znając miary pozostałych kątów tego trójkąta. A jeśli w trójkącie prostokątnym będziemy znać długość jednego boku i miarę jednego kąta ostrego? Wtedy z pomocą przychodzi trygonometria! Wykorzystując trygonometrię umiemy również znaleźć miary kątów trójkąta znając długości jego boków. Obliczanie długości boków oraz miary kątów trójkąta nazywamy rozwiązywaniem trójkąta.

Twoje cele

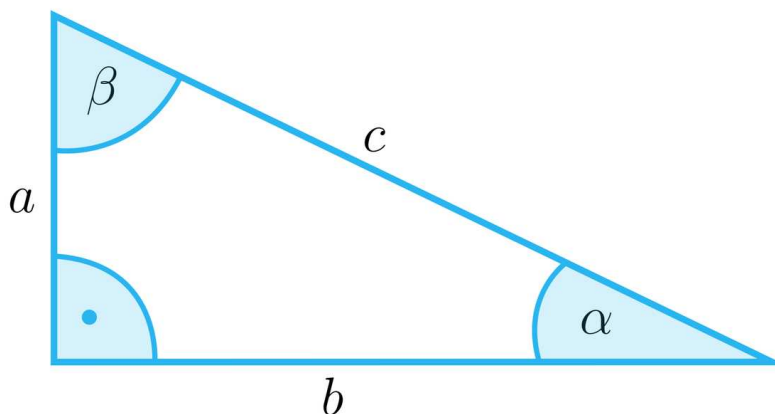
- Obliczysz miary kątów i boków trójkąta prostokątnego mając dane długości dwóch boków.
- Obliczysz miary kątów i boków trójkąta prostokątnego mając daną długość jednego boku oraz miarę jednego kąta.

Przeczytaj



Rozwiązać trójkąt oznacza podać długości wszystkich jego boków i miary wszystkich kątów.

Przypomnijmy najważniejsze informacje o trójkątach. Wykorzystamy je przy rozwiązywaniu trójkątów.



Przyjmując oznaczenia jak na powyższym rysunku możemy sformułować następujące twierdzenia:

1. Twierdzenie Pitagorasa:

Twierdzenie: Twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego:

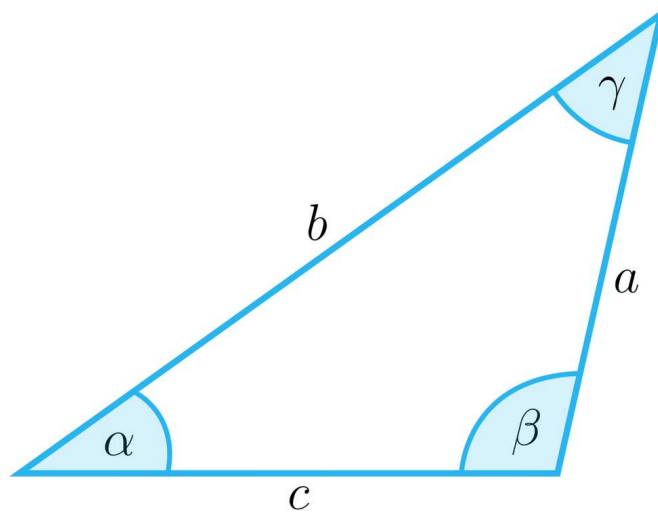
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

3. Twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



4. Cechy przystawania trójkątów:

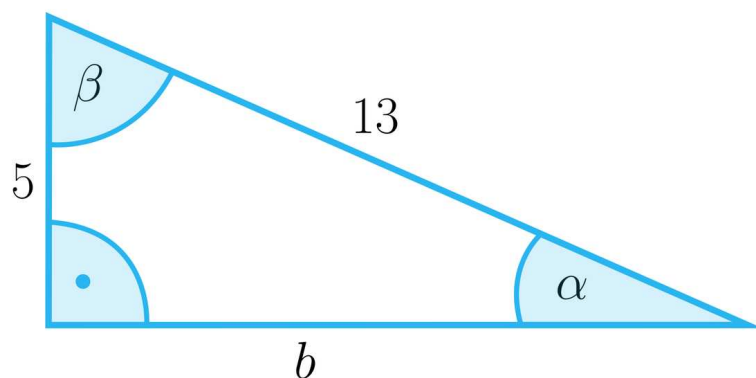
- I bok, bok, bok – przystawanie odpowiednich boków,
- II bok, kąt, bok – przystawanie dwóch par boków i kąta między nimi,
- III kąt, bok, kąt – przystawanie dwóch kątów i boku pomiędzy nimi.

Przykład 1

Rozwiążemy trójkąt prostokątny, w którym jedna z przyprostokątnych ma miarę 5 a przeciwprostokątna miarę 13.

Rozwiązanie:

Zacniemy od znalezienia długości drugiej przyprostokątnej. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:



$$5^2 + b^2 = 13^2$$

$$b^2 = 144$$

$$b = 12$$

Pozostaje znalezienie miar kątów trójkąta.

Skorzystamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,38$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	0,0524	87
18	0,3090	0,3249	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	0,4245	67

Zatem

$$\alpha \approx 22^\circ \text{ a } \beta = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) \approx 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

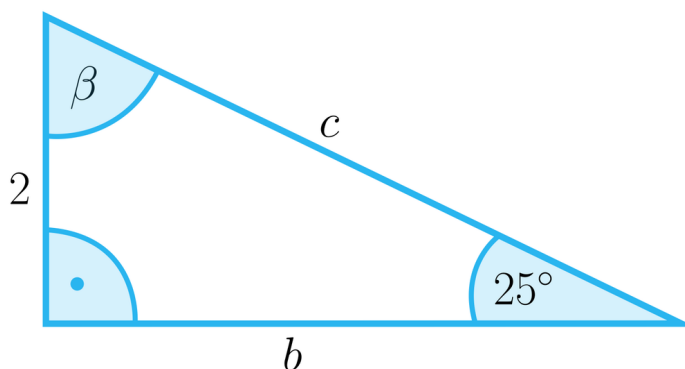
Odpowiedź:

Omawiany trójkąt ma boki długości 5, 12 i 13 oraz kąty o mierze 90° , 22° i 68° .

Przykład 2

Rozwiążemy trójkąt prostokątny, w którym jedna z przyprostokątnych ma miarę 2 a kąt naprzeciwko tego boku ma miarę $\alpha = 25^\circ$.

Rozwiązanie:



Zacniemy od znalezienie miary drugiego kąta ostrego $\beta = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Aby znaleźć długości boków trójkąta skorzystamy z tablicy funkcji trygonometrycznych.

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65

$$\sin 25^\circ \approx 0,42 = \frac{2}{c}$$

$$\text{Zatem } c \approx \frac{2}{0,42} = 4,76.$$

Długość boku b można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$b^2 = 4,76^2 - 2^2 \approx 22,66 - 4 = 18,66, \text{ więc } b \approx 4,32.$$

Odpowiedź:

Omawiany trójkąt ma boki długości 2, 4,32 i 4,76 oraz kąty o mierze 90° , 25° i 65° .

Przykład 3

Rozwiążemy trójkąt wiedząc, że najkrótszy bok trójkąta prostokątnego ma długość 10 oraz jeden z kątów ostrych tego trójkąta ma miarę 5 razy większą niż drugi.

Rozwiązanie:

Oznaczmy miarę mniejszego kąta jako α . Wówczas $\alpha + 5\alpha = 90^\circ$, więc $\alpha = 15^\circ$. Na przeciwko najmniejszego kąta trójkąta mamy najkrótszy bok. Zatem $\sin \alpha = \sin 15^\circ = \frac{10}{c} \approx 0,2588$. Stąd $c \approx 38,64$. Pozostaje nam obliczyć długość dłuższej przyprostokątnej: $10^2 + b^2 = 38,64^2$, czyli $b^2 \approx 1393,05$

$$b \approx 37,32.$$

Odpowiedź:

Omawiany trójkąt ma boki długości 10, 37,32 i 38,64 oraz kąty o mierze 90° , 15° i 75° .

Zwróćmy uwagę, że znając jedynie miarę kątów trójkąta nie jesteśmy w stanie go rozwiązać – trójkąty o takich samych miarach kątów nie są przystające a podobne.

Przykład 4

Wiedząc, że jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 57° oraz że obwód tego trójkąta wynosi 100 rozwiążemy ten trójkąt.

Rozwiązanie:

Zacniemy od obliczenia miary drugiego kąta ostrego: $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$. Oznaczmy długości boków trójkąta jako $a < b < c$. Zachodzą równości: $\operatorname{tg} 57^\circ = \frac{b}{a}$, $\sin 57^\circ = \frac{b}{c}$ oraz $a + b + c = 100$. Korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych oraz wyznaczając a i c z dwóch pierwszych równań otrzymujemy: $\frac{b}{1,54} + b + \frac{b}{0,84} = 100$, po zsumowaniu: $2,84b = 100$, więc $b \approx 35,2$, $a \approx \frac{35,2}{1,54} \approx 22,9$ oraz $c \approx \frac{35,2}{0,84} \approx 41,9$.

Odpowiedź:

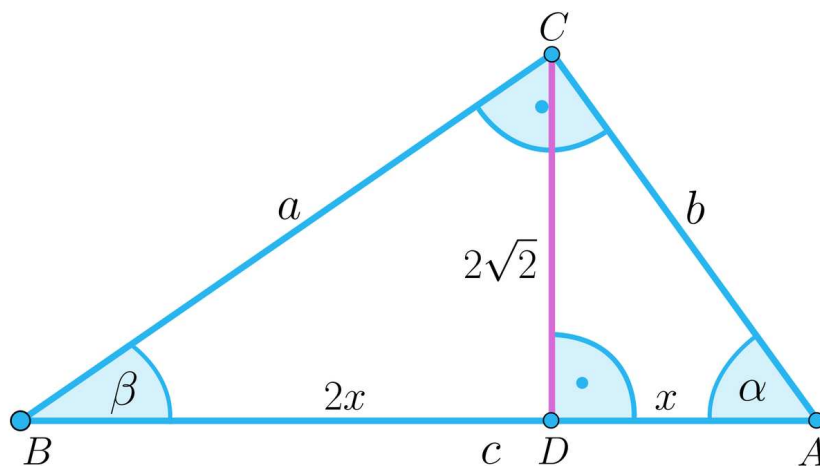
Przybliżone długości boków omawianego trójkąta, to 22,9, 35,2 i 41,9 a przybliżone miary jego kątów, to 90° , 33° i 57° .

Przykład 5

W trójkącie prostokątnym wysokość o długości $2\sqrt{2}$ opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli podstawę na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy dłuższy od drugiego. Rozwiążemy ten trójkąt.

Rozwiązanie:

Sporządzimy rysunek pomocniczy:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zauważmy, że $ADC \sim BDC$, zatem $\frac{2x}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{x}$, więc $2x^2 = 8$, $x = 2$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy, że $2^2 + (2\sqrt{2})^2 = b^2$, więc $b = 2\sqrt{3}$. Pozostaje zauważyć, że $c = 6$ oraz ponownie skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla trójkąta ABC : $a^2 + (2\sqrt{3})^2 = 6^2$, więc $a = 2\sqrt{6}$. Znajdziemy teraz miary kątów ostrych tego trójkąta korzystając np. z równości $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych ustalamy, że $\alpha \approx 55^\circ$, więc $\beta \approx 35^\circ$.

Odpowiedź:

Omawiany trójkąt ma boki długości $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$ i 6 oraz kąty o mierze 90° , około 35° i około 55° .

Słownik

rozwiązać trójkąt prostokątny

podać długości wszystkich jego boków i miary wszystkich kątów

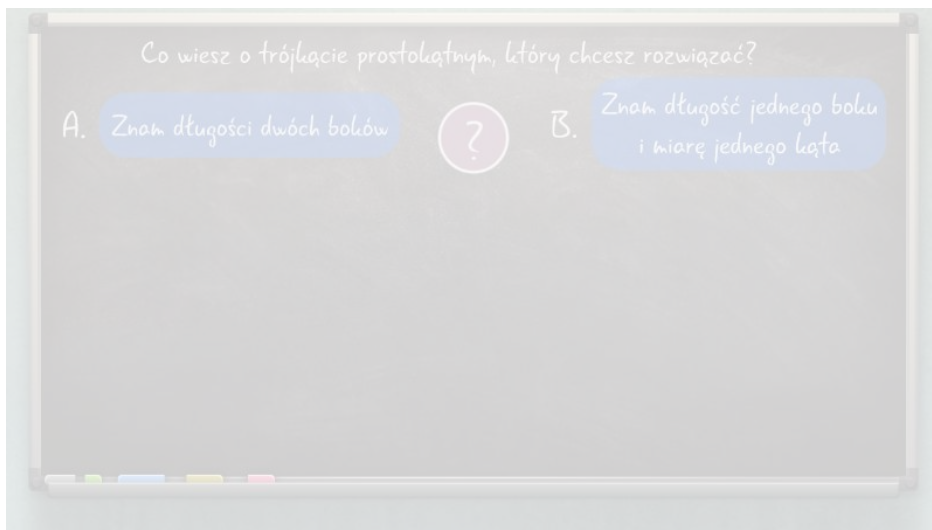
funkcje trygonometryczne kąta ostrego α

zależności między długościami boków w trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ma miarę α

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

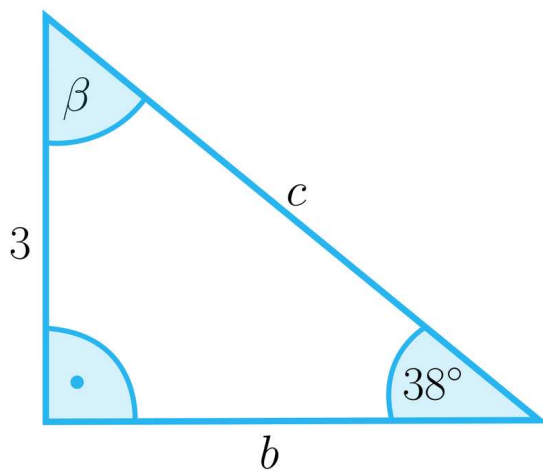
W symulacji, którą widzisz poniżej podsumujemy wszystko, o czym powinieneś pamiętać rozwiązując trójkąty prostokątne. Zapoznaj się uważnie z tym materiałem a następnie rozwiąż samodzielnie polecenia pod symulacją.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Awv71OH>

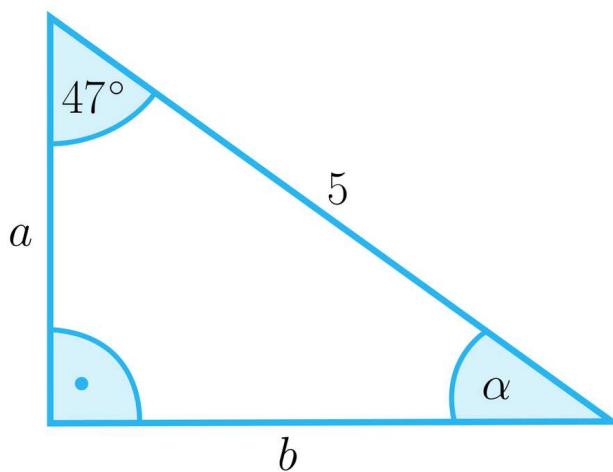
Polecenie 2

Wiedząc, że $\cos 38^\circ \approx 0,79$ rozwiąż trójkąt prostokątny, w którym bok naprzeciwko kąta 38° ma długość 3 cm. Nie korzystaj z tablic.



Polecenie 3

Wiedząc, że $\operatorname{tg} 47^\circ \approx 1,07$ rozwiąż trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 5 cm a jeden z kątów ostrych miarę 47° . Nie korzystaj z tablic.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym ABC : $|AB| = 2$, $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$. Zatem bok BC ma długość

☐ $\frac{\sqrt{41}}{2}$

☐ 4

☐ 5

☐ 0,8

Ćwiczenie 2



W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 4, a cosinus kąta ostrego leżącego przy tej przyprostokątnej jest równy 0,2. Przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość

☐ 10

☐ $2\sqrt{10}$

☐ 20

☐ $4\sqrt{5}$

Ćwiczenie 3



Przekątna prostokąta długości 10 jest nachylona do dłuższego boku pod kątem ostrym α takim, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Obwód prostokąta jest równy

☐ 14

☐ 8

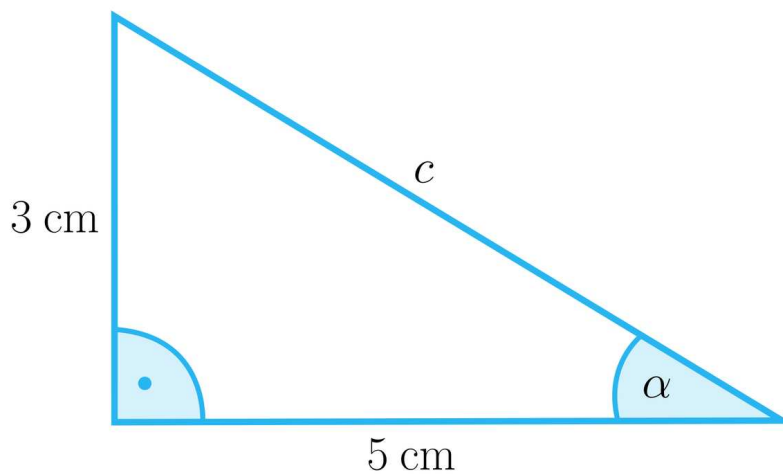
☐ 12

☐ 28

Ćwiczenie 4



Korzystając z informacji przedstawionych na poniższym rysunku wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



☐ $\beta \approx 53^\circ$

☐ $\alpha \approx 37^\circ$

☐ $c \approx 5,83 \text{ cm}$

☐ $c = 4 \text{ cm}$

☐ $\alpha \approx 31^\circ$

☐ $c = \sqrt{34} \text{ cm}$

☐ $\beta \approx 31^\circ$

Ćwiczenie 5



Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 62° a jeden z jego boków ma długość 9. Jaki może być obwód tego trójkąta?

☐ 45,1

☐ 38,77

☐ 23,92

☐ 21,17

☐ 27,53

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Uzupełnij tekst przeciągając odpowiedź we właściwe miejsce. Możesz też kliknąć w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

W równoległoboku boki mają długości 10 cm i 6 cm, a pole jest równe 20 cm^2 . Zatem krótsza wysokość tego równoległoboku ma długość cm. Sinus kąta ostrego, leżącego przy dłuższym boku, jest równy . Kąt ten ma więc miarę około stopni. Miara kąta między krótszą wysokością równoległoboku a jego krótszym bokiem to stopni. Krótsza wysokość poprowadzona z wierzchołka równoległoboku na podstawę dzieli podstawę na dwa odcinki o długości cm $\approx$ cm oraz cm $\approx$ cm.

Ćwiczenie 9



W okrąg o promieniu 3 wpisano trójkąt tak, że jeden z boków trójkąta leży na średnicy okręgu. Sinus jednego z kątów ostrych w tym trójkącie jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz pole tego trójkąta i wskaż prawidłową odpowiedź.

☐ $4\sqrt{3}$

☐ $4\sqrt{5}$

☐ $8\sqrt{3}$

☐ $8\sqrt{5}$

Dla nauczyciela

Autor: Julia Wódka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza miary kątów i boków trójkąta prostokątnego mając dane długości dwóch boków,
- oblicza miary kątów i boków trójkąta prostokątnego mając daną długość jednego boku oraz miarę jednego kąta.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują Symulację interaktywną, a następnie rozwiązują samodzielnie polecenia z nią związane. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Obliczanie długości boków w trójkącie prostokątnym

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych”.