



Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną
typu $|x + 1| + |x - 2| < 5$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną typu

$$|x + 1| + |x - 2| < 5$$

Źródło: Tinc, pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale będziemy rozwiązywać nierówności z wartością bezwzględną. Tym razem zajmujemy się nierównościami typu $|x + 1| + |x - 2| < 5$.

Z reguły będzie to prowadziło do rozwiązania kilku nierówności i określenia koniunktji lub alternatywy wyznaczonych zbiorów rozwiązań.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętność rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $|x + 1| + |2x - 4| < 5$.

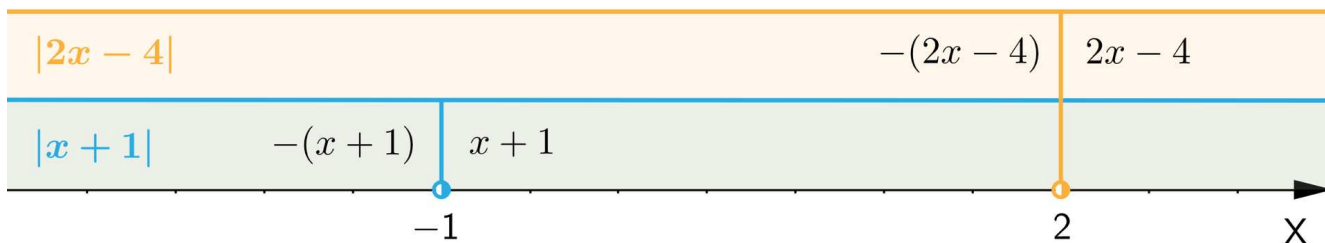
Najpierw zapiszemy wyrażenie $|x + 1|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, korzystając z definicji wartości bezwzględnej. Otrzymujemy:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{dla } x < -1 \end{cases}$$

Analogicznie:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{dla } x \geq 2 \\ -(2x - 4) & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

Przedstawimy teraz, jak zmieniają się znaki wyrażen w wyznaczonych przedziałach na osi liczbowej.



1. Jeśli $x \in (-\infty, -1)$ to nierówność jest postaci:

$$-(x + 1) - (2x - 4) < 5$$

$$-x - 1 - 2x + 4 < 5$$

$$-3x < 2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in \emptyset$.

2. Jeśli $x \in \langle -1, 2 \rangle$ to nierówność jest postaci:

$$x + 1 - (2x - 4) < 5$$

$$x + 1 - 2x + 4 < 5$$

$$-x + 5 < 5$$

$$-x < 0$$

$$x > 0$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in (0, 2)$.

3. Jeśli $x \in \langle 2, \infty)$ to nierówność jest postaci:

$$x + 1 + 2x - 4 < 5$$

$$3x - 3 < 5$$

$$3x < 8$$

$$x < 2\frac{2}{3}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in \langle 2, 2\frac{2}{3}$.

Rozwiązaniem nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków.

Rozwiązanie nierówności: $x \in (0, 2\frac{2}{3})$.

Przykład 2

Wykażemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $3 + 4\sqrt{1 + 4x + 4x^2} > |2x + 1|$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że:

$$\sqrt{1 + 4x + 4x^2} = \sqrt{(1 + 2x)^2} = |1 + 2x|$$

Zatem nierówność zapiszemy w postaci $3 + 4 \cdot |1 + 2x| > |1 + 2x|$.

Czyli:

$$3 \cdot |1 + 2x| > -3$$

$$|1 + 2x| > -1$$

Ponieważ wartość bezwzględna liczby jest zawsze liczbą nieujemną, nasza nierówność jest zawsze prawdziwa. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przykład 3

Wykażemy, że nierówność $||x + 2| + |4x - 8|| < 1$ to **nierówność sprzeczna**.

Zapiszemy nierówność z wartością bezwzględną jako koniunkcję nierówności.

$$|x + 2| + |4x - 8| < 1 \text{ i } |x + 2| + |4x - 8| > -1$$

Druga nierówność jest zawsze prawdziwa ponieważ wartość bezwzględna przyjmuje zawsze nieujemne wartości, zatem suma takich wartości - również.

Określimy zbiór rozwiązań nierówności:

$$|x + 2| + |4x - 8| < 1$$

1. Jeśli $x \in (-\infty, -2)$ to nierówność jest postaci:

$$-(x + 2) - (4x - 8) < 1$$

$$-x - 2 - 4x + 8 < 1$$

$$-5x < -5$$

$$x > 1$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in \emptyset$.

2. Jeśli $x \in \langle -2, 2 \rangle$ to nierówność jest postaci:

$$x + 2 - (4x - 8) < 1$$

$$x + 2 - 4x + 8 < 1$$

$$-3x < -9$$

$$x > 3$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in \emptyset$.

3. Jeśli $x \in \langle 2, \infty \rangle$ to nierówność jest postaci:

$$x + 2 + 4x - 8 < 1$$

$$5x - 6 < 1$$

$$5x < 7$$

$$x < 1\frac{2}{5}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy $x \in \emptyset$.

Zatem nierówność nie posiada rozwiązania.

Ponieważ rozwiązaniem nierówności $||x + 2| + |4x - 8|| < 1$ jest koniunkcja rozwiązań nierówności $|x + 2| + |4x - 8| < 1$ i $|x + 2| + |4x - 8| > -1$, zatem nierówność ta jest sprzeczna. Nie posiada rozwiązania.

Słownik

nierówność sprzeczna

nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę należącą do dziedziny tej nierówności

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem pokazującym sposób rozwiązywania nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi metodą graficzną oraz metodą tradycyjną - korzystając bezpośrednio z definicji wartości bezwzględnej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKabPmP6Y>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego rozwiązywania nierówności typu moduł z x odjąć a dodać moduł z x odjąć b mniejsze od c.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność $|x - 4| + |3x + 5| < 6$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną typu $|x + 1| + |x - 2| < 5$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 \cdot |x + 3| + 3 \cdot |x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2 \cdot |x - 3| < 11$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi
- doskonali umiejętności rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji, prowadzącej do rozwiązania nietypowych nierówności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- odwrócona klasa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu opracowują sposób rozwiązywania nierówności liniowych z wartością bezwzględną typu $|x + 1| + |x - 2| < 5$. Zapoznają się z informacjami zawartymi w sekcji Przeczytaj.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
3. Uczniowie oglądają film samouczek i omawiają go wraz z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jakie napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wartość bezwzględna - definicja](#)
[Nierówności stopnia pierwszego](#)

Wskazówki metodyczne:

Film może być materiałem inspirującym do przygotowania przez uczniów własnego samouczka.