Logarytm dziesiętny

Logarytm dziesiętny

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Siedemnastowieczny brytyjski matematyk Henry Briggs, znany również jako wybitny kartograf, postanowił usprawnić obliczenia wykonywane przez astronomów i nawigatorów. Rachunki te były uciążliwe, ponieważ wymagały wykonywania działań na dużych liczbach. W owych czasach potrafiono już mnożenie zamieniać na dodawanie za pomocą logarytmów. Prowadziło to jednak do dużych przybliżeń, co w nawigacji morskiej powodowało fatalne skutki. Briggs, po konsultacjach z wybitnym matematykiem Johnem Napierem, zaproponował, aby w obliczeniach powszechnie korzystać z logarytmów o podstawie 10, jako najbardziej przydatnych. Stworzył przy tym tablice logarytmiczne, z których do dziś korzystają matematycy.

Obecnie logarytmy o podstawie 10 nazywane są logarytmami dziesiętnymi lub logarytmami Briggsa.

W tym materiale będziemy obliczać wartości dokładne i przybliżone logarytmów dziesiętnych, poznamy też niektóre ich własności.

Twoje cele

- Wyznaczysz wartości dokładne logarytmów dziesiętnych.
- Oszacujesz wartości wyrażeń zawierających logarytmy dziesiętne.
- Wykorzystasz wartości przybliżone logarytmów dziesiętnych w obliczeniach arytmetycznych.

Przeczytaj

Wartość dokładna logarytmu dziesiętnego

Logarytm dziesiętny to logarytm o podstawie 10.

Matematycy umówili się, że zapisując logarytm dziesiętny, zwykle pomija się podstawę. Zamiast $\log_{10} x$ możemy napisać $\log x$. Logarytmy dziesiętne obliczamy podobnie, jak logarytmy o innych podstawach. Pamiętamy przy tym, że liczba logarytmowana musi być dodatnia.

Przykład 1

Przykłady obliczania logarytmów dziesiętnych przy wykorzystaniu definicji logarytmu.

$\log\ 1\ =\ 0, \text{bo } 10^0 = 1$
$\log\ 10\ =\ 1, \text{bo } 10^1 = 10$
$\log\ 100\ =\ 2, \text{bo } 10^2 = 100$
$\log\ 1000\ =\ 3, \text{bo } 10^3 = 1000$

Przykład 2

Przykłady obliczania logarytmów dziesiętnych przy wykorzystaniu definicji logarytmu.

$\log\ 0,1\ =\ -1, \text{bo } 10^{-1} = 0,1$
$\log\ 0,01\ =\ -2,\ \text{bo } 10^{-2} = 0,01$
$\log\ \frac{1}{1000}\ =\ -3,\ \text{bo } 10^{-3} = \frac{1}{1000}$
$\log\ \frac{1}{10000}\ =\ -4,\ \text{bo } 10^{-4} = \frac{1}{10000}$

Przykład 3

$\log 10^3 = 3$
$\log 10^7 = 7$
$\log 10^{-3} = -3$
$\log 10^{-1} = -1$
$\log 10^{-6} = -6$

Zauważmy, że logarytm dziesiętny potęgi liczby 10 jest równy wykładnikowi tej potęgi.

Logarytm dziesiętny liczby przedstawionej w postaci iloczynu, którego pierwszym czynnikiem jest liczba całkowita, a drugim potęga liczby dziesięć, można zapisywać za pomocą sumy logarytmu dziesiętnego pierwszego czynnika i liczby, będącej wykładnikiem drugiego czynnika.

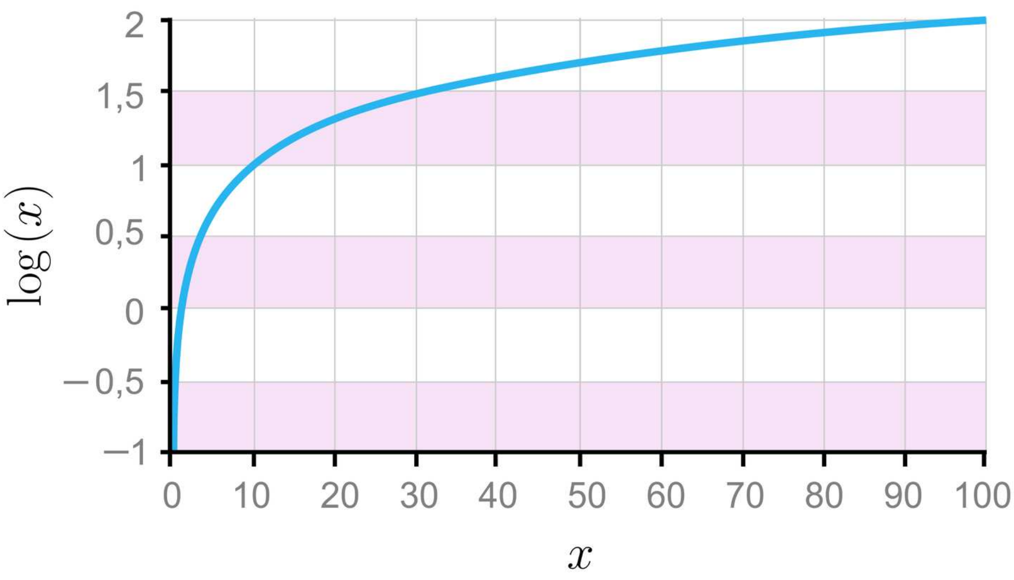
Przykład 4

$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$, zatem $\log 300 = \log 3 + \log 100 = \log 3 + 2$

$0,008 = 8 \cdot 0,001 = 8 \cdot 10^{-3}$, zatem $\log 0,008 = \log 8 \cdot 10^{-3} = \log 8 - 3$

Wartość przybliżona logarytmu dziesiętnego

Nie zawsze obliczając logarytm dziesiętny można skorzystać z definicji logarytmu. Wtedy korzystamy z wartości przybliżonych logarytmów dziesiętnych.



Podstawa logarytmów dziesiętnych jest większa od 1, zatem funkcja $y = \log x$ jest rosnąca (rysunek przedstawia wykres tej funkcji).

Wykorzystując tę własność, można łatwo znaleźć dwie kolejne potęgi liczby 10, między którymi zawarty jest dany logarytm.

Przykład 5

Oszacujemy wartość liczby $\log 6,8$.

Zauważmy, że $1 < 6,8 < 10$, zatem $10^0 < 6,8 < 10$.

Zatem $\log 10^0 < \log 6,8 < \log 10^1$, stąd $0 < \log 6,8 < 1$.

Przykład 6

Oszacujemy wartość $\log 0,3456$.

Zauważmy, że $0,1 < 0,3456 < 1$, zatem $10^{-1} < \log 0,3456 < 10^0$.

Zatem $\log 10^{-1} < \log 0,3456 < \log 10^0$, stąd $-1 < \log 0,3456 < 0$.

Przybliżone wartości logarytmów, dokładniejsze niż znalezione w powyższych przykładach, można odczytać z tablic logarytmicznych. Z takich tablic można odczytać też liczby logarytmowane. Jednak jest to dość skomplikowane. Zatem warto, korzystając np. z kalkulatora lub komputera odczytać i zapamiętać wartości przybliżone co najmniej dwóch logarytmów (np. $\log 2$, $\log 3$) i za ich pomocą, wyznaczać przybliżone wartości innych logarytmów.

Przykład 7

Wiedząc, że $\log 2 \approx 0,3010$ obliczymy $\log 8$, $\log \sqrt{2}$, $\log 5$.

$\log 8 = \log\left(2^3\right) = 3\log 2 \approx 3 \cdot 0,3010 = 0,9030$

$\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \cdot 0,3010 = 0,1505$

$\log 5 = \log(10 : 2) = \log 10 - \log 2 \approx 1 - 0,3010 = 0,699$

Przykład 8

Wiedząc, że $\log 3 \approx 0,4771$ obliczymy przybliżoną wartość wyrażenia $W = \frac{\log 9}{\log 30 - \log 6}$.

$W = \frac{\log 9}{\log 30 - \log 6} = \frac{2\log 3}{\log 10 + \log 3 - \log 3 - \log 2}$

$W \approx \frac{2 \cdot 0,4771}{1 - 0,3010} = \frac{0,9542}{0,699}$

$W \approx 1,365$

Słownik

logarytm dziesiętny

logarytm o podstawie 10

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż matematyczne puzzle. Dopasuj fragmenty wielokątów tak, aby wyrażenia o tej samej wartości utworzyły kwadrat. Powodzenia!

Polecenie 2

Oblicz $\frac{\log 200 - \log 20}{\sqrt{\log 10000}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wiedząc, że $\log 3 \approx 0,4771$ i $\log 2 \approx 0,3010$, oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $\log 300 + \log 6$.

Ćwiczenie 8

Korzystając z tego, że $\log 5 \approx 0,6990$ i $\log 3 \approx 0,4771$ oblicz przybliżoną wartość liczby x takiej, że $3^x = 5$. Wynik podaj z dokładnością do $0,01$.

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Logarytm dziesiętny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, rozszerzenie

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wartości dokładne logarytmów dziesiętnych
- szacuje wartości wyrażeń zawierających logarytmy dziesiętne
- wykorzystuje wartości przybliżone logarytmów dziesiętnych w obliczeniach arytmetycznych
- współpracuje w grupie, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wędrujące plakaty

- gra dydaktyczna

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- projektor multimedialny,
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie pracują w grupach metodą wędrujących plakatów. Zadaniem uczniów jest powtórzenie poznanych na poprzednich lekcjach wiadomości o logarytmach. W tym celu każda z grup dopisuje po jednej wiadomości dotyczącej logarytmów na plakacie i podaje plakat dalej. Plakat krąży tak długo, aż wiadomości uczniów wyczerpią się. Wtedy jeden z uczniów, korzystając z plakatu, prezentuje zapisane tam informacje. Plakat uczniowie zamieszczają w widocznym miejscy tak, aby mogli z nich korzystać na lekcji. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji Przeczytaj. Następnie w parach układają puzzle z sekcji Gra dydaktyczna. Uczniowie pracują w grupach – ich zadaniem jest ułożenie domina z wykorzystaniem logarytmów dziesiętnych zbudowanego z co najmniej z 8 kamieni. Grupy wymieniają się kartkami domina, poprawiają ewentualne błędy kolegów.

Faza podsumowująca:

Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie w domu ćwiczeń interaktywnych z sekcji Ćwiczenia sprawdzające.

Materiały pomocnicze:

Definicja logarytmu. Własności logarytmu

Wskazówki metodyczne:

Matematyczne puzzle mogą być wykorzystane jako powtórzenie i podsumowanie wiadomości o logarytmach.