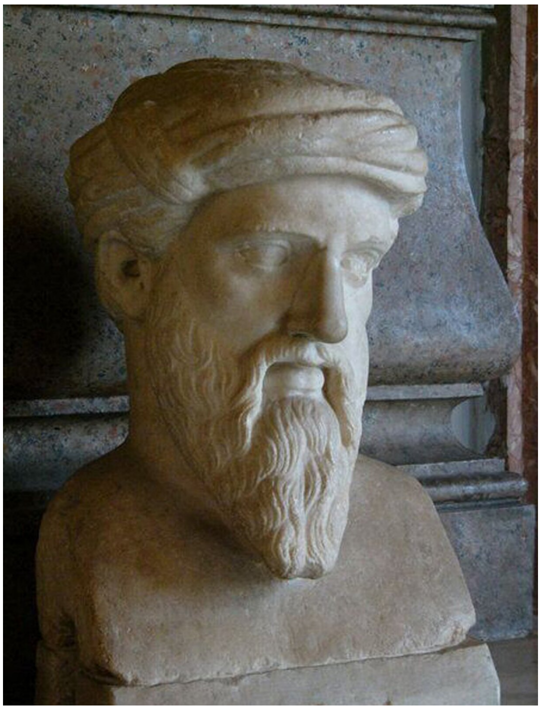
Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych

Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych

Źródło: MJ Tangonan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Poza liczbami wymiernymi – o których mówiliśmy w poprzedniej lekcji – istnieją również liczby niewymierne, czyli takie, które nie dają się zapisać jako iloraz dwóch liczb całkowitych (przy założeniu, że dzielnik nie jest zerem). Przypuszcza się, że liczby niewymierne odkryli pitagorejczycy (uczniowie Pitagorasa). Według niektórych źródeł pierwszą rozważaną liczbą niewymierną był $\sqrt{2}$, czyli długość przekątnej kwadratu o boku 1.

Inni historycy stawiają hipotezę, że odkrycie liczb niewymiernych wiązało się z przekątną pięciokąta foremnego.



Pitagoras – rzeźba w muzeum na Kapitolu
Źródło: dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Wszystkie przekątne pięciokąta foremnego tworzą bowiem pentagram, zwany też gwiazdą pitagorejską, który był symbolem szkoły pitagorejskiej. Fakt ten pozwala zaryzykować twierdzenie, że pierwszą liczbą niewymierną, którą napotkali pitagorejczycy była $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, czyli długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku 1.

W tej lekcji przyjrzymy się bliżej liczbom niewymiernym.

Twoje cele

- Rozpoznasz liczby niewymierne.
- Zastosujesz własności mnożenia, dzielenia, dodawania i odejmowania liczb niewymiernych.
- Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka.

Przeczytaj

Definicja: Liczba niewymierna

Liczbą niewymierną nazwiemy każdą liczbę, której nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych przy założeniu, że dzielnik jest różny od zera.

Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy najczęściej symbolem $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lub $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, rzadziej przez $\mathbb{IQ}$.

Własność: Własności i wartości przybliżone

Przypomnijmy, że rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych są nieskończone i nieokresowe. Z tego powodu często (zwłaszcza w zadaniach praktycznych lub gdy potrzebne jest oszacowanie jakiejś wielkości) podajemy przybliżenia liczb niewymiernych. Poniżej podamy początek rozwinięcia dziesiętnego dla kilku liczb niewymiernych

$$\sqrt{2} = \mathbf{1,41421356237...}$$

$$\sqrt{3} = \mathbf{1,73205080757...}$$

$$\sqrt{5} = \mathbf{2,2360679775...}$$

$$\sqrt{6} = \mathbf{2,44948974278...}$$

$$\sqrt{7} = \mathbf{2,64575131106...}$$

$$\sqrt{10} = \mathbf{3,16227766017...}$$

$$\pi = \mathbf{3,14159265359...}$$

Przykład 1

Wyznaczymy rozwinięcia dziesiętne z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku podanych liczb:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1,414 = 2,828 \approx 2,83$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \frac{2 \cdot 1,732}{3} = \frac{3,464}{3} \approx 1,1547 \approx 1,15$$

Przykład 2

Aby oszacować wartość liczby $5\sqrt{3}$, możemy zauważyć, że $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$.

Stąd:

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

zatem $5\sqrt{3}$ znajduje się na osi między liczbami 5 i 10.

Ponieważ wykonane oszacowanie nie jest zbyt dokładne, możemy wykonać szacowanie nieco inaczej.

Najpierw wykonamy przekształcenie

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{64} < \sqrt{75} < \sqrt{81},$$

więc

$$8 < \sqrt{75} < 9.$$

Zatem $5\sqrt{3}$ znajduje się na osi liczbowej między 8 a 9.

Ciekawostka

Ułamkiem łańcuchowym nazywamy wyrażenie postaci

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}},$$

gdzie:

a_0 – jest liczbą całkowitą,
$a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k$ – są liczbami naturalnymi dodatnimi.

Liczba jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy jest nieskończone.

Przykład 3

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ldots}}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ldots}}}}}}}}}$$

Dowody niewymierności liczb

Dowody niewymierności liczb często przeprowadzamy metodą *nie wprost*.
W metodzie tej zaprzeczamy tezie, którą chcemy udowodnić i wyciągamy z tego zaprzeczenia wnioski. Jeżeli otrzymane wnioski stoją w sprzeczności z założeniami twierdzenia lub innymi faktami matematycznymi, oznacza to, że teza jest prawdziwa.

Udowodnimy, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Sprawdźmy, do czego doprowadzi nas zaprzeczenie tezy.

Do czego doprowadziłoby przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną?

Gdyby $\sqrt{2}$ był liczbą wymierną, wówczas (z definicji) istniałyby liczby całkowite m i n takie, że $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, przy czym $n \neq 0$. Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą dodatnią możemy przyjąć, że m i n są liczbami naturalnymi dodatnimi. Ponadto przyjmijmy, że $\frac{m}{n}$ jest ułamkiem nieskracalnym, czyli że jedynym wspólnym dzielnikiem liczb m i n jest liczba 1 (o takich liczbach mówimy, że są to liczby względnie pierwsze). Ponieważ obie strony równości $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ są dodatnie, można je podnieść do kwadratu otrzymując $2 = \frac{m^2}{n^2}$, co jest równoważne równości $2n^2 = m^2$. Zauważmy, że lewa strona równości jest liczbą podzielną przez 2.

Aby równość była prawdziwa, prawa strona też musi dzielić się przez 2. Ponieważ prawa strona jest pełnym kwadratem, więc dzieli się przez 4. Wynika stąd, że lewa strona również dzieli się przez 4, czyli 2 dzieli n^2. Zatem 2 dzieli n. Okazuje się, że zarówno n jaki i m są podzielne przez 2, co jest sprzeczne z założeniem, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Do sprzeczności doprowadziło nas założenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.

Oznacza to, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, czyli jest liczbą niewymierną.

Przykład 4

Wiedząc że $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną, udowodnimy, że $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+3}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód ponownie przeprowadzimy metodą nie wprost.

Zbadajmy, do czego doprowadziłoby założenie, że $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+3}$ jest liczbą wymierną. Wówczas istniałaby taka liczba wymierna w, dla której $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+3} = w$.

Otrzymaną równość możemy przekształcić następująco:

$$\sqrt{7} - 2 = w\left(\sqrt{7} + 3\right)$$

$$\sqrt{7} - 2 = w\sqrt{7} + 3w$$

$$\sqrt{7} - w\sqrt{7} = 2 + 3w$$

$$\sqrt{7}(1-w)=2+3w$$

$$\sqrt{7}=\frac{2+3w}{1-w}$$

Ponieważ iloczyn, iloraz, suma i różnica liczb wymiernych są liczbami wymiernymi, zatem cała prawa strona równości jest liczbą wymierną. Ponieważ $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną, otrzymujemy sprzeczność (liczba wymierna nie jest równa żadnej liczbie niewymiernej). Do sprzeczności doprowadziło nas założenie, że liczba $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+3}$ jest wymierna.

Oznacza to, że liczba $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+3}$ jest niewymierna.

Działania na liczbach niewymiernych

Zbiór liczb niewymiernych nie jest zamknięty na żadne z działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Oznacza to, że suma, różnica iloczyn i iloraz liczb niewymiernych może być wymierny.

Przykład 5

Podamy przykłady par liczb niewymiernych, dla których iloczyn, iloraz, suma i różnica są liczbami wymiernymi, oraz par liczb niewymiernych, dla których iloczyn, iloraz, suma i różnica są liczbami niewymiernymi.

Przykłady par liczb niewymiernych, dla których suma, różnica, iloczyn i iloraz są liczbami niewymiernymi	Przykłady par liczb niewymiernych, dla których suma, różnica, iloczyn i iloraz są liczbami wymiernymi
$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$	$\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)=2$
$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$	$\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}=1$
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 3}=\sqrt{9}=3$
$\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{10:2}=\sqrt{5}$	$\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{8:2}=\sqrt{4}=2$

Słownik

liczby względnie pierwsze

przynajmniej dwie liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik to 1

liczba niewymierna

liczba rzeczywista, której nie można przedstawić jako iloraz dwóch liczb całkowitych

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DL7ONkdKx

Film nawiązujący do zagadnienia liczb niewymiernych.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje liczby niewymierne;
- stosuje własności mnożenia, dzielenia, dodawania i odejmowania liczb niewymiernych;
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- wykład;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Przeanalizuj informacje zawarte w animacji”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych”).

Materiały pomocnicze:

Ofiara Hippazosa, czyli o tajemnicy liczb niewymiernych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zbiór liczb niewymiernych. Działania w zbiorze liczb niewymiernych”.