



Przedział liczbowy nieograniczony i jego graficzna interpretacja

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przedział liczbowy nieograniczony i jego graficzna interpretacja

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Znasz już przedziały liczbowe ograniczone. Potrafisz je zaznaczać na osi liczbowej i odczytywać z niej oraz zapisywać używając odpowiednich nawiasów. Wiesz też jak wykonywać działania na przedziałach ograniczonych. Przedziały, zgodnie z definicją, są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Co zatem, ze zbiorem liczb rzeczywistych? Czy on też jest przedziałem?

Twoje cele

- Przypomnisz sobie, jak graficznie interpretujemy zbiór liczb rzeczywistych.
- Dowiesz się jaki jest związek między przedziałem nieograniczonym, a zbiorem liczb rzeczywistych.
- Poznasz sytuacje, w których przedział nieograniczony pojawia się, na przykład jako zbiór rozwiązań.

Przeczytaj

Przypomnij sobie definicje, które pozwolą nam odpowiedzieć na zadane we wstępie pytanie.

Przeanalizuj przykłady.

Definicja: Przedział liczbowy

Przedział liczbowy, to [podzbiór](#) zbioru liczb rzeczywistych. Możemy go zapisać za pomocą nierówności, przy użyciu nawiasów lub zaznaczyć na osi liczbowej.

Przykład 1

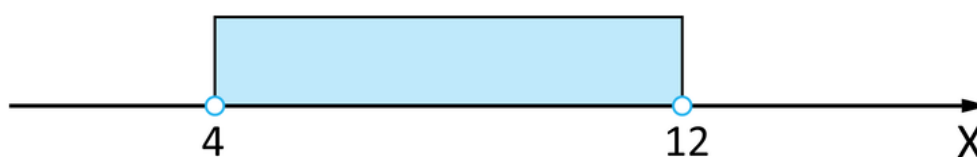
Przypomnij sobie jakie [przedziały liczbowe](#) już znasz.

- przedział ograniczony domknięty: $x \in \langle -5, 3 \rangle$



$$-5 \leq x \leq 3$$

- przedział ograniczony otwarty: $x \in (4, 12)$



$$4 < x < 12$$

- przedział ograniczony otwarto – domknięty: $x \in (2, 5]$



$$2 < x \leq 5$$

- przedział ograniczony domknięto – otwarty: $x \in [-5, 4)$



$$-5 \leq x < 4$$

Definicja: Podzbiór zbioru

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A należy do zbioru B .

Mówimy wtedy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B i zapisujemy symbolicznie $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Warto też pamiętać, że podzbiorem dowolnego zbioru A jest ten sam zbiór A .

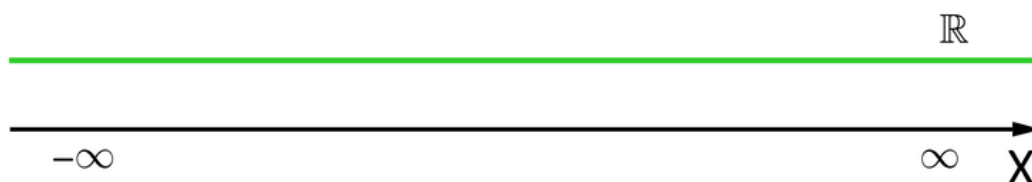
A zatem również $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$.

Możemy więc powiedzieć, że zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest przedziałem.

Jest to jednak przedział nieograniczony.

Zbiór liczb rzeczywistych możemy zapisać w postaci $(-\infty, +\infty)$.

Możemy ten przedział przedstawić na osi liczbowej:



Wiesz, że na przedziałach możemy wykonywać działania.

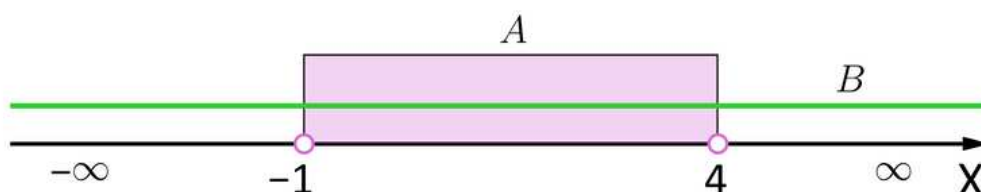
Przeanalizuj przykłady przedstawiające sumę i iloczyn przedziału nieograniczonego $(-\infty, +\infty)$ i przedziałów liczbowych ograniczonych. Różnicą tych przedziałów zajmiemy się w kolejnych materiałach.

Przykład 2

Zaznacz zbiory A i B na osi liczbowej, a następnie wyznacz ich sumę i iloczyn.

$$A = (-1, 4)$$

$$B = \mathbb{R}$$



Suma przedziałów, czyli liczby, które należą do przedziału A lub do przedziału B .

$$A \cup B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} = B$$

Iloczyn przedziałów, to liczby, które należą do przedziału A i do przedziału B .

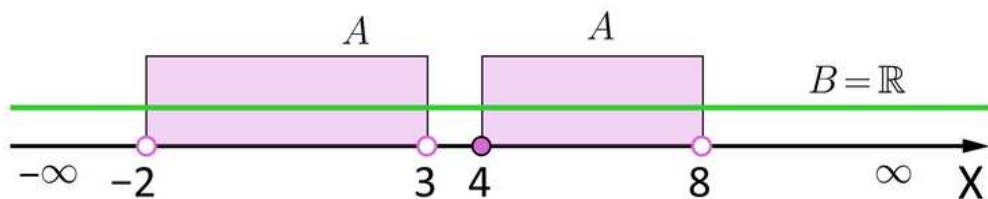
$$A \cap B = (-1, 4) = A$$

Przykład 3

Zaznacz zbiory A i B na osi liczbowej, a następnie wyznacz ich sumę i iloczyn.

$$A = (-2, 3) \cup (4, 8)$$

$$B = \mathbb{R}$$



$$A \cup B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} = B$$

$$A \cap B = (-2, 3) \cup (4, 8) = A$$

WNIOSEK:

- Suma dowolnego przedziału ograniczonego A i przedziału nieograniczonego $(-\infty, \infty)$, jest równa przedziałowi nieograniczonemu $(-\infty, \infty)$.
- Iloczyn dowolnego przedziału ograniczonego A i przedziału nieograniczonego $(-\infty, \infty)$, jest równy przedziałowi ograniczonemu A .

Przedział nieograniczony $(-\infty, \infty)$ jest też zbiorem rozwiązań równań i nierówności tożsamościowych.

Przykład 4

Rozwiąż równania.

a)

$$3x + 4 - x = -5 + 2x + 9$$

$$2x + 4 = 2x + 4$$

$$2x - 2x = 4 - 4$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

b)

$$\frac{2x-6}{4} = \frac{x-3}{2} \quad | \cdot 4$$

$$2x - 6 = 2x - 6$$

$$2x - 2x = 6 - 6$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

c)

$$x(x - 4) + 2 = 2x - (6x - 2) + x^2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 2x - 6x + 2 + x^2$$

$$x^2 - x^2 - 4x + 4x + 2 - 2 = 0$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

W wyniku przekształcania równań równoważnie, w każdym z nich otrzymaliśmy

$$0 = 0$$

To oznacza, że są to równania tożsamościowe, a więc są spełnione przez wszystkie liczby rzeczywiste.

Możemy zatem zapisać, że $x \in (-\infty, \infty)$.

Przykład 5

Rozwiąż nierówność.

$$4 \cdot (x - 3) \geq -12 + 4x - 2$$

$$4x - 12 \geq -12 + 4x - 2$$

$$4x - 4x \geq -12 + 12 - 2$$

$$0x \geq -2$$

$$0 \geq -2$$

Ta nierówność jest prawdziwa i nie zależy od liczby, którą podstawimy w miejsce x .

A zatem zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(-\infty, \infty)$.

Słownik

podzbiór A zbioru Z

zbiór A zawarty w zbiorze Z ; wszystkie elementy zbioru A należą do zbioru Z

przedział liczbowy

podzbiór zbioru liczb rzeczywistych

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj film samouczek, a następnie na jego podstawie wykonaj znajdujące się poniżej polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Gjlq7w9>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej przedziału liczbowego nieograniczonego i jego graficznej interpretacji.

Polecenie 2

Wyznacz sumę i iloczyn przedziałów $A = \mathbb{R}$ oraz $B = (-1, 4]$.

Polecenie 3

Rozwiąż równanie. Zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału

$$4x(x - 5) + 15 = 5 \cdot (3 - 4x) + 4x^2.$$

Polecenie 4

Rozwiąż nierówność. Zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału

$$3 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (x - 1) < 5x + 4.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Zbiór liczb rzeczywistych nie jest przedziałem.
- ☐ Zbiór liczb rzeczywistych jest przedziałem $(-\infty, +\infty)$.
- ☐ Zbiór liczb rzeczywistych jest przedziałem nieograniczonym.
- ☐ Do przedziału $(-\infty, +\infty)$ należą wszystkie liczby rzeczywiste.
- ☐ Zbiór liczb rzeczywistych jest przedziałem ograniczonym.

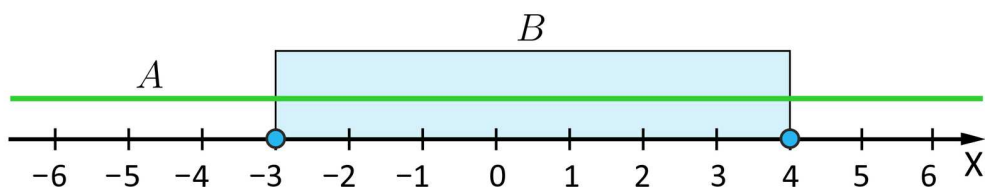
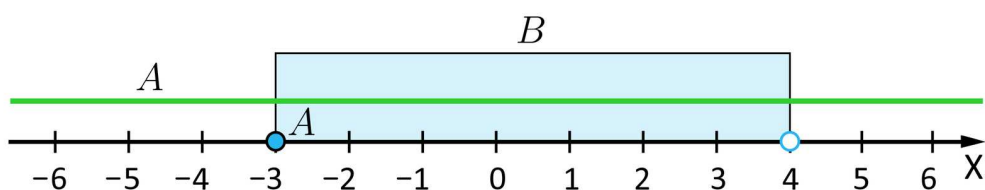
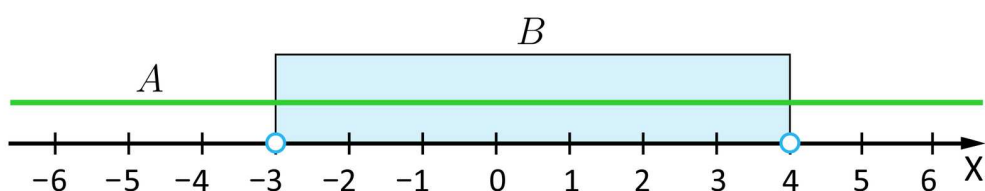
Ćwiczenie 2



Wskaż oś liczbową, na której przedstawiono przedziały $A = \mathbb{R}$ oraz $B = \langle -3, 4 \rangle$.

Uzupełnij zdania zapisane pod rysunkiem.

Zaznacz poprawną odpowiedź.



Przeciągnij poprawną odpowiedź w odpowiednie miejsce.

$$A \cup B = \boxed{}$$

$$A \cap B = \boxed{}$$

$(-3, 4)$

$(-\infty, +\infty)$

$\langle -3, 4 \rangle$

$\langle -3, 4 \rangle$

$(-3, 4)$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij komórki tabeli, przenosząc w puste miejsca odpowiednie z podanych przedziałów.

A	$A \cap \mathbb{R}$
$(-10, 12)$	
$\langle -10, 12 \rangle$	
$(-10, 12 \rangle$	
$\langle -10, 12 \rangle$	

$\langle -10, 12 \rangle$

$(-10, 12)$

$(-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}$

$\langle -10, 12 \rangle$

$(-10, 12 \rangle$

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie równania, których rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.

☐ $5x - 3 = 5 \cdot (x - 1) + 2$

☐ $x(x + 1) - 3 = 3 - x(1 - x)$

☐ $3x + 5 = 3 \cdot (x + 5)$

☐ $x^2 - 4x - 1 = x(x - 4) - 1$

Ćwiczenie 5



Rozwiąż nierówności, przeciągnij do okienka "Rozwiązaniem jest przedział nieograniczony" te, których rozwiązaniem jest przedział nieograniczony $(-\infty, +\infty)$, a resztę przenieś do okienka "Pozostałe".

Rozwiązaniem jest przedział nieograniczony

Pozostałe

$$7x - (x + 3) \leq 6 \cdot (x + 4)$$

$$x - 1 - (5x - 2) > -4x + 1$$

$$3 \cdot (x - 1) + 2 + x^2 < x(x + 3)$$

$$5x - 2 \cdot (x - 1) > 4x + 2$$

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Znajdź zbiory Z i W i wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

$$Z = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \geq 0\}$$

$$W = \{x \in \mathbb{R} : x(x - 1) + 16 = (x + 4)^2 - 9x\}$$

☐ Suma zbiorów $Z \cup W$ zawiera tylko liczby dodatnie.

☐ Iloczyn zbiorów $Z \cap W$ jest przedziałem $\langle -4, +\infty \rangle$.

☐ Suma zbiorów $Z \cup W$ jest przedziałem $(-\infty, +\infty)$.

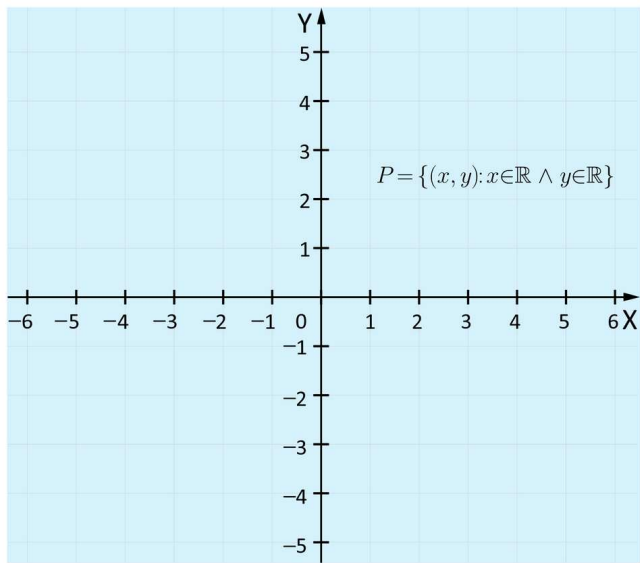
☐ Iloczyn zbiorów $Z \cap W$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono zbiór P określony następująco:

$P = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$



Wskaż parę zbiorów A i B , tak aby $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) \in P$.

Zbiór A	
$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4-x}{2} + 1 = 2 + \frac{3-x}{3}\right\}$ ☐	$B = \left\{y \in \mathbb{R} : (y - 3\right.$
$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1,5 + \frac{2x-1}{2} = x + 1\right\}$ ☐	$B = \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{1}{2}\right.$
$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 4x(-x + 1) + \frac{x}{2} = 4,5x - 4 \cdot (x^2 + 1)\right\}$ ☐	$B = \left\{y \in \mathbb{R} : \right.$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przedział liczbowy nieograniczony i jego graficzna interpretacja

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;

3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wie, jak graficznie zinterpretować zbiór liczb rzeczywistych
- zaznacza zbiór liczb rzeczywistych na osi liczbowej
- wie, jaki jest związek między przedziałem nieograniczonym, a zbiorem liczb rzeczywistych
- zna sytuacje, w których przedział nieograniczony pojawia się, na przykład jako zbiór rozwiązań równań lub nierówności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- konkurs zadaniowy w grupach

Formy pracy:

- praca w parach
- praca indywidualna
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w parach zasady rozwiązywania równań i nierówności liniowych oraz działań na przedziałach ograniczonych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz film samouczek.
2. Uczniowie konsultują z nauczycielem pojawiające się problemy i wątpliwości, a następnie wykonują indywidualnie polecenia umieszczone pod medium bazowym.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. W każdej grupie uczniowie losują zadania z puli za dwa, trzy i cztery punkty. Nauczyciel może wykorzystać ćwiczenia interaktywne lub przygotować dodatkowe zadania.
4. W każdej grupie uczeń, który zdobędzie największą liczbę punktów, otrzymuje ocenę z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany przez uczniów jako pomoc przy rozwiązywaniu ćwiczeń interaktywnych. Może być również pomocny przy utrwalaniu w domu wiadomości z lekcji.