



Prostopadłościan wpisany w kulę

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Prostopadłościan wpisany w kulę

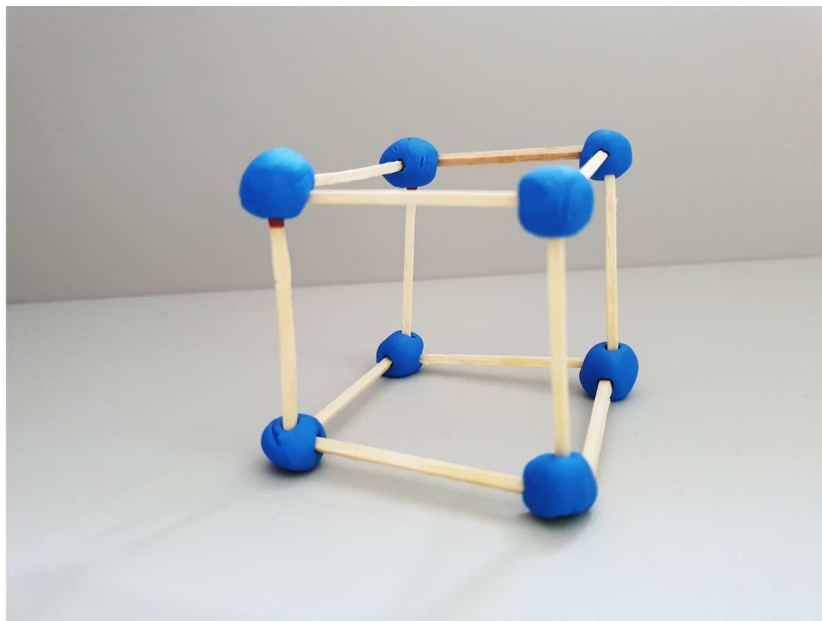
Źródło: Pete Linforth, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W przedstawionym materiale będziemy rozwiązywać problemy związane z prostopadłościanem umieszczonym w kuli. Pomimo to, że każdego dnia mijamy setki

prostopadłościanów, często nie potrafimy wyobrazić sobie co kryje się we wnętrzu takiej bryły. Wielu uczniów ma problem z zaznaczaniem kątów w przestrzeni czy wyborem przekroju bryły taką płaszczyzną, która umożliwi rozwiązanie zadania. Pomocne w takiej sytuacji może być zbudowanie przestrzennego modelu takiej bryły na przykład wykorzystując plastelinę i wykałaczki.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., domena publiczna.

Twoje cele

- Poznasz własności prostopadłościanu wpisanego w kulę.
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość kuli oraz prostopadłościanu.
- Zbadasz zależność między promieniem kuli opisanej na prostopadłościanie, a przekątną bryły.
- Przeprowadzisz rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Przeczytaj

Własności prostopadłościanu i kuli są wszystkim dobrze znane. Potrafimy obliczyć objętość oraz pole powierzchni tych figur przestrzennych. W tym materiale zajmiemy się obiektem, który jest połączeniem kuli i prostopadłościanu oraz nauczymy się jak wykonać przekrój, który pomoże nam w rozwiązaniu wielu zadań.

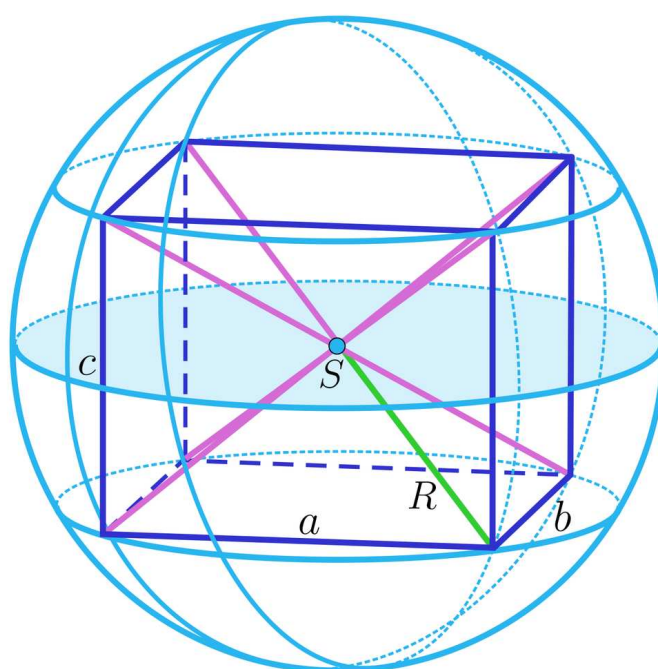
Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja: Prostopadłościan wpisany w kulę

Prostopadłościan jest wpisany w kulę, jeśli wszystkie wierzchołki prostopadłościanu leżą na powierzchni kuli.

Możemy zamiennie używać określenia: **prostopadłościan jest wpisany w kulę lub kula jest opisana na prostopadłościanie**.

We wszystkich przykładach i zadaniach będziemy posługiwać się odpowiednim przekrojem i oznaczeniami jak na rysunku:



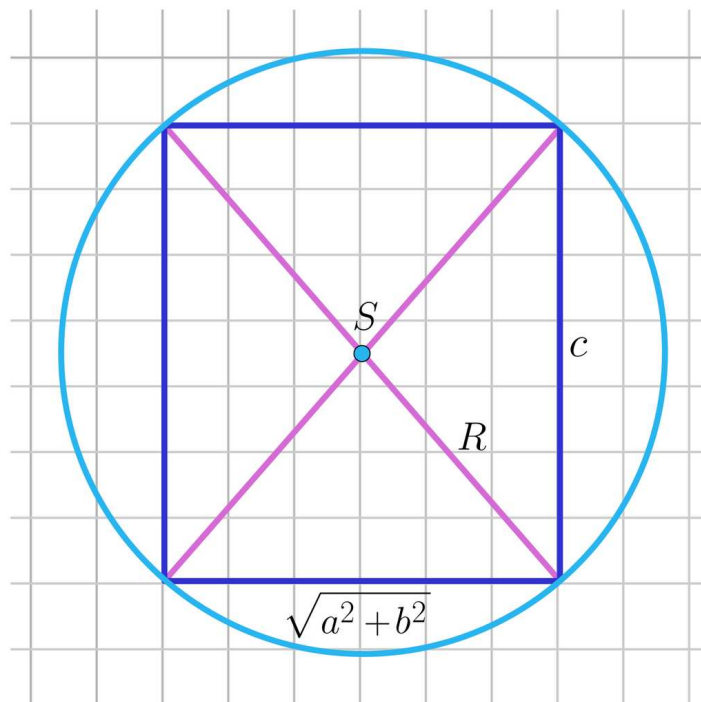
gdzie:

a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu,

R – promień kuli opisanej na prostopadłościanie,

S – środek kuli opisanej na prostopadłościanie.

Przekrój płaszczyzną zawierającą **przekątną prostopadłościanu** i przekątną podstawy.



Zauważmy, że przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

A zatem, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy obliczyć promień kuli w zależności od długości krawędzi prostopadłościanu.

$$(2R)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2$$

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Przykład 1

Obliczymy **objętość kuli** opisanej na prostopadłościanie, którego krawędzie mają długości 2, 3 i 6.

Rozwiązanie:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49} = \frac{7}{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{343}{8} = \frac{343}{6}\pi.$$

Przykład 2

Objętość prostopadłościanu wynosi 480 cm^3 . Jedna z krawędzi ma długość 5 cm, a stosunek dwóch pozostałych krawędzi wynosi 4 : 3. Obliczymy pole powierzchni kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Rozwiązanie:

Skoro stosunek długości dwóch krawędzi prostopadłościanu wynosi 4 : 3 to możemy przyjąć, że $a = 4x$ oraz $b = 3x$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Wykorzystując informację o objętości prostopadłościanu otrzymujemy równanie:

$$4x \cdot 3x \cdot 5 = 480$$

$$60x^2 = 480$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

A zatem $a = 8\sqrt{2}$ cm, $b = 6\sqrt{2}$ cm i $c = 5$ cm.

Promień kuli opisanej na tym prostopadłościanie jest równy

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{225} = \frac{15}{2}$$

Pole powierzchni kuli jest równe $P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{225}{4} = 225\pi$ [cm²].

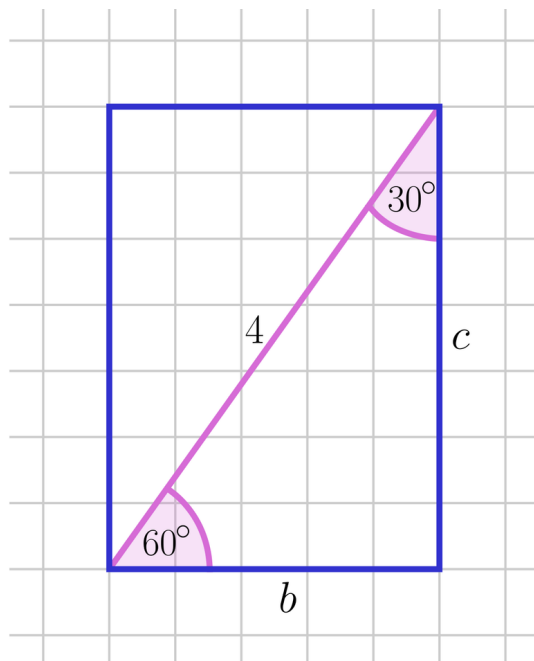
Przykład 3

Przekątna jednej ze ścian bocznych prostopadłościanu ma długość 4 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Przekątna sąsiedniej ściany bocznej tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Obliczmy średnicę kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Rozwiązanie:

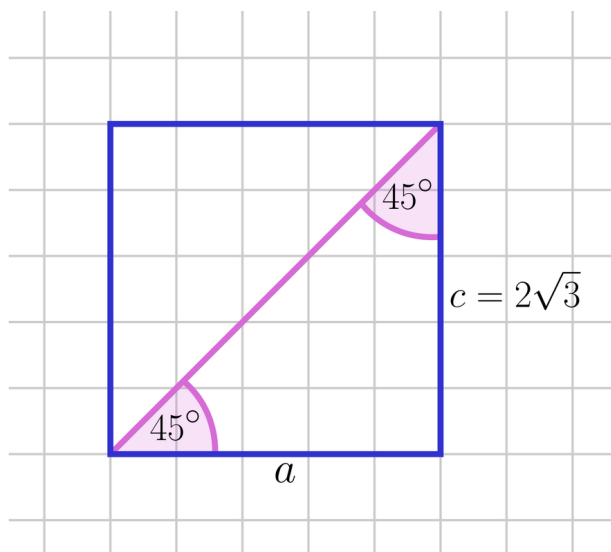
Zauważmy, że kąt między przekątną ściany bocznej prostopadłościanu, a płaszczyzną podstawy, to kąt między przekątną ściany i krawędzią podstawy.

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Korzystając z własności trójkąta prostokątnego o kątach 30° , 60° otrzymujemy $b = 2$ oraz $c = 2\sqrt{3}$.

Sąsiednia ściana boczna jest kwadratem o boku długości $2\sqrt{3}$.



Stąd krawędź podstawy $a = 2\sqrt{3}$.

$$\text{A zatem } 2R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Przykład 4

W kulę o powierzchni 64π wpisano prostopadłościan którego podstawą jest kwadrat o przekątnej 6. Jaka jest wysokość tego prostopadłościanu?

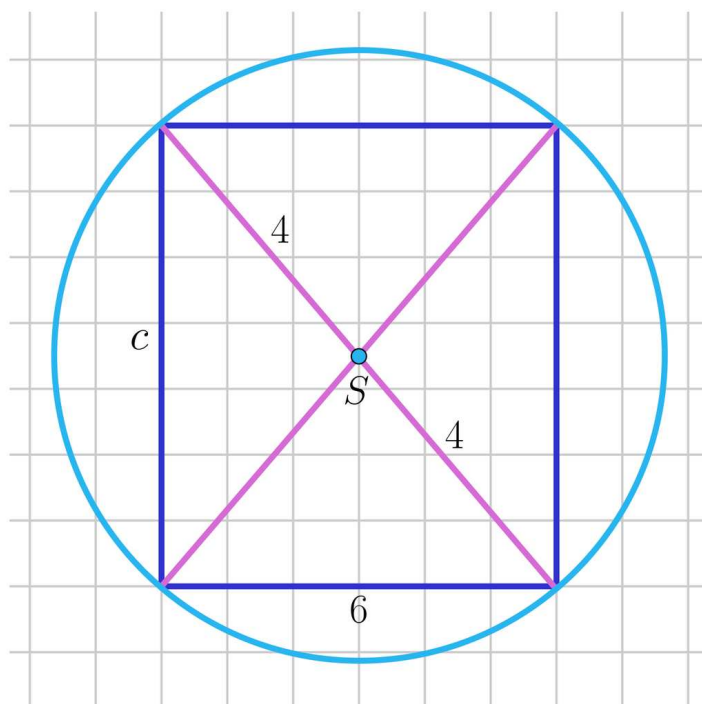
Rozwiązanie:

Wyznamy promień kuli. Otrzymujemy równanie:

$$4\pi R^2 = 64\pi$$

Stąd $R = 4$.

Do rozwiązania zadania wykorzystamy przekrój prostopadłościanu płaszczyzną zawierającą przekątną bryły i przekątną podstawy.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$c^2 + 6^2 = 8^2$$

$$c^2 = 28$$

$$c = 2\sqrt{7}.$$

Przykład 5

Obliczymy długość najmniejszego z okręgów wyznaczonych przez wierzchołki ściany graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o polu podstawy równym 25 cm^2 i wysokości 6 cm .

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że podstawą jest kwadrat o polu 25 cm^2 , zatem jego krawędź podstawy ma długość 5 cm . Wynika stąd, że pole powierzchni podstawy jest mniejsze niż

pole powierzchni ściany bocznej: $25 \text{ cm}^2 > 30 \text{ cm}^2$.

Wierzchołki prostopadłościanu leżą na sferze, wówczas możemy wyciąć poprzecznie z tej strefy okrąg wyznaczony przez wierzchołki górnej lub dolnej podstawy.

Do rozwiązania zadania wykorzystamy przekrój prostopadłościanu płaszczyzną zawierającą jego podstawę.

Zauważmy, że przekątna kwadratu jest także średnicą okręgu opisanego na tej figurze. Ze wzoru na przekątną kwadratu $d = a\sqrt{2}$ dostajemy, że $d = 5\sqrt{2}$.

Korzystając ze wzoru na długość okręgu $L = 2\pi r$, gdzie $2r = d$ otrzymujemy, że $L = 5\sqrt{2} [\text{cm}]$.

Słownik

objętość prostopadłościanu

Objętość prostopadłościanu to iloczyn długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

Wzór na objętość prostopadłościanu o krawędziach a , b i c :

$$V = a \cdot b \cdot c$$

kula

Kula powstaje przez obrót dowolnego koła wokół jego średnicy.

Wzór na objętość kuli o promieniu R :

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Wzór na pole powierzchni kuli o promieniu R :

$$P = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

przekątna prostopadłościanu

Przekątna prostopadłościanu to odcinek łączący dwa najdalej oddalone od siebie wierzchołki. Wzór na przekątną prostopadłościanu o krawędziach a , b i c :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

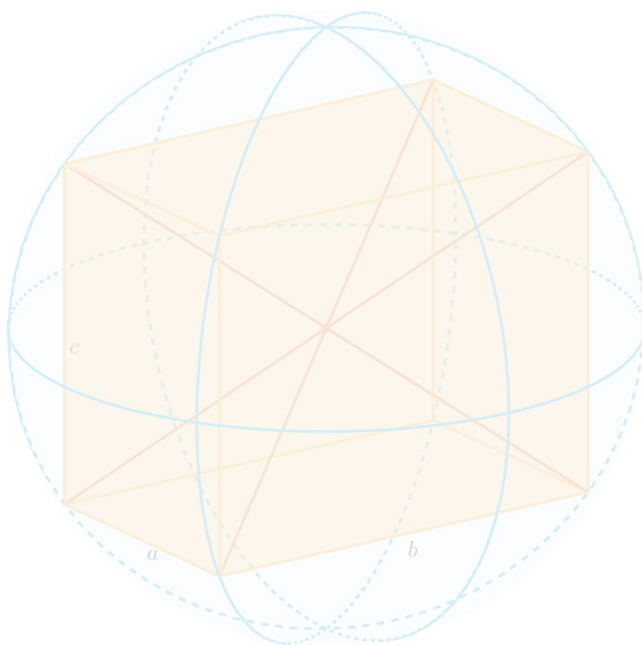
Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą symulacją interaktywną. Przedstawiono w niej prostopadłościan wpisany w kulę. Za pomocą suwaków możesz zmieniać wymiary prostopadłościanu.

Ustaw długości krawędzi tak, aby były kolejnymi liczbami naturalnymi parzystymi. Dla przyjętych wartości oblicz objętość kuli.

Sprawdź swoje obliczenia za pomocą przycisku „pokaż objętość kuli”.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DBR5IWpnY>

Polecenie 2

W kulę o promieniu 2 wpisano prostopadłościan, którego podstawą jest kwadrat, a wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Na prostopadłościanie o wymiarach 3, 4 i 5 można opisać kulę o średnicy:

☐ $3\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{3}$

☐ $5\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{5}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. W kulę o objętości $\frac{5\sqrt{15}}{2}\pi$ można wpisać prostopadłościan o wymiarach:

☐ $\sqrt{2} \times 2 \times 3$

☐ $2 \times 3 \times 3$

☐ $2 \times 2 \times 3$

☐ $1 \times 2 \times 3$

Ćwiczenie 3



Oblicz długość najmniejszego z okręgów wyznaczonych przez wierzchołki ściany prostopadłościanu wpisanego w kulę o najmniejszej powierzchni, wiedząc, że podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o polu 16 cm^2 , a jego wysokość ma długość 5 cm .

☐ $3\sqrt{2}\pi$

☐ $\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi$

☐ $5\sqrt{2}\pi$

☐ $4\sqrt{2}\pi$

Ćwiczenie 4



Wpisz poprawną liczbę.

Powierzchnia kuli opisanej na prostopadłościanie o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ jest równa

$\cdot \pi$.

Ćwiczenie 5



Z dwóch sześciąt o objętości 8 cm^3 zbudowano prostopadłościan. Jaka jest objętość kuli opisanej na tym prostopadłościanie?

Uzupełnij tekst tak, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że opisany w treści zadania sześcian jest sześcianem o krawędzi .

Z dwóch takich sześciąt otrzymujemy prostopadłościan o krawędziach długości

.

Stąd przekątna tego prostopadłościanu jest równa czyli .

Promień kuli opisanej na sześcianie jest równy .

Podstawiając do wzoru na objętość kuli otrzymujemy czyli .

$$8\sqrt{6}\pi$$

$$2\sqrt{6}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2}$$

$$2 \text{ cm}, 2 \text{ cm i } 4 \text{ cm}$$

$$2 \text{ cm}$$

$$R = \sqrt{6}$$

Ćwiczenie 6



Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 96. Długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka pozostają w stosunku $3 : 4 : 5$. Wykaż, że pole powierzchni kuli opisanej na tym prostopadłościanie jest równe 200π .

Ćwiczenie 7



Wysokość prostopadłościanu jest równa c . Przekątna jednej ze ścian bocznych prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Przekątna sąsiedniej ściany bocznej tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Obliczmy średnicę kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Ćwiczenie 8



Z kuli o średnicy 13 wycięto prostopadłościan o wysokości 12, w którym krawędzie podstawy różnią się o 1. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Ćwiczenie 9



Prostopadłościan o podstawie kwadratowej wpisano w kulę o promieniu R . Przekątna tego prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor-Szcześniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sześcian wpisany w kulę

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje prostopadłościan wpisany w kulę i potrafi naszkicować przekrój osiowy tej sytuacji
- bada zależność między promieniem kuli opisanej na prostopadłościanie a przekątną bryły
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość kuli oraz prostopadłościanu
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązywania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- analiza pomysłów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat: „Prostopadłościan wpisany w kulę” i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel razem z uczniami analizuje polecenia z sekcji „Symulacja interaktywna”.
2. Następnie nauczyciel dzieli klasę na 6 grup. Każda grupa otrzymuje do rozwiązania jedno ćwiczenie z pośród ćwiczeń 1 – 6 w części „Sprawdź się”.
3. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy związane z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/powinnam zapamiętać, że...”.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Prostopadłościan](#)

- [Kula i sfera](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może poprosić o uczniów o przeanalizowanie zależności objętości kuli od wymiarów prostopadłościanu na podstawie symulacji interaktywnej.