Średnia ważona

Średnia ważona

Źródło: NeONBRAND, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jednym z najważniejszych wskaźników finansowych informujących o przeciętnym koszcie względnym kapitału zaangażowanego w finansowanie inwestycji przez przedsiębiorstwo jest WACC, czyli średni ważony koszt kapitału (ang. *weighted average cost of capital*).

WACC jest używany przy ocenie rentowności inwestycji – czy koszt kapitału finansującego przewyższy stopę zwrotu i inwestycja nie będzie opłacalna. Czy wręcz przeciwnie, koszt kapitału finansującego będzie dużo niższy niż przewidywana stopa zwrotu i inwestycja przyniesie duży zysk.

Średni ważony koszt kapitału uwzględnia przy tym różne źródła finansowania inwestycji (np. emisję akcji, kredyt).

Jeśli więc w przyszłości masz zamiar założyć swoją firmę, warto już teraz poznać tajniki wyznaczania średniej ważonej, będącej podstawą obliczania WACC.

Twoje cele

- Obliczysz średnią ważoną zestawu danych.
- Wyodrębnisz własności badanego zestawu danych, na podstawie obliczonej średniej ważonej.

Przeczytaj

Przykład 1

Wystawiając ocenę końcoworoczną z biologii w pewnej szkole, bierze się pod uwagę trzy liczby:

s – średnią arytmetyczną ocen uzyskanych w ciągu całego roku szkolnego,
p – ocenę z obowiązkowej pracy projektowej,
u – udział w konkursach, olimpiadach, turniejach.

Wynik końcowy k ustala się według wzoru:

$$k = \frac{3}{4}s + \frac{1}{8}p + \frac{1}{8}u$$

Największe znaczenie (największą wagę) ma więc średnia ocen uzyskanych w ciągu całego roku szkolnego, oceny p i u mają mniejszą wagę.

Mówimy, że końcowa ocena k jest średnią ważoną ocen s, p, u z wagami odpowiednio $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$.

Średnia ważona jest więc średnią elementów, którym przypisywane są różne wagi. Zatem elementy o większej wadze, mają większy wpływ na średnią. Jeśli wszystkie elementy mają takie same wagi – średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

Statystycy rozważają kilka rodzajów średniej ważonej – my będziemy zajmować się tylko średnią ważoną arytmetyczną, zwaną krótko średnią ważoną.

Średnia ważona ma własności podobne do średniej arytmetycznej – jest mianowaną miarą tendencji centralnej (miary tendencji centralnej – zwane miarami średnimi, przeciętnymi – charakteryzują przeciętny poziom badanego zjawiska, przyjmują takie wartości, wokół których skupiają się wszystkie pozostałe wartości badanej cechy statystycznej).

Definicja: Średnia ważona arytmetyczna

Średnią ważoną arytmetyczną liczb $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ z odpowiadającymi im odpowiednio wagami $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ nazywamy liczbę $\bar{x}_w$ określoną wzorem

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

gdzie:
$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ – są liczbami dodatnimi.

Przykład 2

Obliczymy średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

Liczby x_i	3	6	18
Wagi w_i	2	3	1

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru na średnią ważoną.

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

W rozważanym przypadku:

$x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 18$

$w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 1$

Stąd:

$$\bar{x}_w = \frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 18 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = \frac{42}{6} = 7$$

Odpowiedź:

Średnia ważona podanego zestawu liczb jest równa 7.

Średnia ważona wykorzystywana jest w sytuacjach, gdy pewnym wielkościom (danym) trzeba nadać większe znaczenie.

Przykład 3

Aneta na egzaminie maturalnym zdawała trzy przedmioty w zakresie rozszerzonym: matematykę, fizykę i język angielski. Z matematyki uzyskała 42 punkty, z fizyki 28 punktów i z języka angielskiego 26 punktów.

Aby Aneta została przyjęta na wybrane studia, średnia ważona liczby uzyskanych przez nią punktów powinna wynosić co najmniej 35.

Przy czym punktom zdobytym z matematyki przypisywano wagę 6, z fizyki wagę 4 i z języka obcego wagę 1.

Ustalimy, czy Aneta dostanie się na wybrane przez siebie studia.

Rozwiązanie:

Przedstawimy wszystkie dane w tabeli.

Przedmiot	Liczba uzyskanych punktów x_i	Waga w_i	$x_i \cdot w_i$
Matematyka	42	6	252

Przedmiot	Liczba uzyskanych punktów x_i	Waga w_i	$x_i \cdot w_i$
Fizyka	28	4	112
Język angielski	26	1	26
Razem		11	390

Obliczamy średnią ważoną liczby uzyskanych punktów.

$$\bar{x}_w = \frac{390}{11} \approx 35,5$$

$$35{,}5 > 35$$

Odpowiedź:

Średnia ważona uzyskanych przez Anetę punktów jest większa od wymaganej, zatem dostanie się ona na studia.

Uzyskane wyniki można **zinterpretować** następująco: pomimo, że Aneta otrzymała mniejszą liczbę punktów od wymaganej z fizyki i języka angielskiego, to wysoka waga liczby punktów uzyskanych z matematyki spowodowała, że w konsekwencji uzyskała wymaganą liczbę punktów.

Zauważmy też, że gdyby o przyjęciu na studia decydowała średnia arytmetyczna, to Aneta nie dostałaby się na studia, gdyż średnia ta jest równa $\frac{42+28+26}{3} = 32$.

Przykład 4

Obliczymy średnią arytmetyczną zestawu danych: 2, 4, 6, 10, 2, 2, 4, 6, 10, 10, 2, 4.

Rozwiązanie:

I sposób:

Korzystamy ze wzoru na średnią arytmetyczną.

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+10+2+2+4+6+10+10+2+4}{12} = \frac{62}{12} = 5\frac{1}{6}$$

II sposób:

Zamiast średniej arytmetycznej obliczymy średnią ważoną, przyjmując, że wagami są liczebności danych.

Wartość x_i	Liczebność $n_i = w_i$	$x_i \cdot w_i$
2	4	8
4	3	12
6	2	12

Wartość x_i	Liczebność $n_i = w_i$	$x_i \cdot w_i$
10	3	30
Razem	12	62

Korzystamy ze wzoru na średnią ważoną.

$$\bar{x}_w = \frac{62}{12} = 5\frac{1}{6}$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy te same liczby.

Odpowiedź:

Średnia arytmetyczna zestawu danych jest równa $5\frac{1}{6}$.

Wniosek:

Średnia arytmetyczna zestawu danych statystycznych $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ jest równa średniej ważonej tego zestawu danych, gdy liczebności $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ odpowiadające danym, przyjmiemy za wagi poszczególnych wartości.

Pokażemy teraz, jak wyznaczyć średnią ważoną zestawu danych zapisanych w postaci szeregu rozdzielczego z przedziałami klasowymi.

Przykład 5

W dziesięcioosobowej grupie osób dokonano pomiaru wieku i otrzymano następujące wyniki: 20, 21, 23, 20, 20, 25, 22, 23, 23, 21.

Obliczymy średni wiek osób z badanej grupy, grupując dane w szereg rozdzielczy z przedziałami klasowymi o rozpiętości 2 lat.

Rozwiązanie:

Budujemy odpowiedni szereg rozdzielczy.

Aby obliczyć średnią, wyznaczymy środki przedziałów klasowych.

Wiek w latach x_i	Liczebność n_i	Środek przedziału klasowego $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i \cdot n_i$
$\langle 20,\ 22)$	5	21	105
$\langle 22,\ 24)$	4	23	92
$\langle 24,\ 26\rangle$	1	25	25
Razem	10		222

$$\bar{x}_1 = \frac{20+22}{2} = 21$$

$$\bar{x}_2 = \frac{22+24}{2} = 23$$

$$\bar{x}_3 = \frac{24+26}{2} = 25$$

Obliczamy średnią, korzystając z wyznaczonych danych i ze wzoru:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \ldots + \bar{x}_k n_k}{n}$$

gdzie:
k – liczba klas,
$\bar{x}_i$ – środek i – tego przedziału, gdzie $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$,
n_i – liczebność dla danego przedziału, gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$,
n – liczebność zbiorowości n statystycznej.

$\bar{x} = \frac{222}{10} = 22,2$

$\bar{x} = 22,2$ lata

Odpowiedź:

Średnia wieku w tej grupie osób wynosi $22,2$ lata.

Ważne!

W szeregach rozdzielczych o przedziałach klasowych średnia arytmetyczna jest zwykle tylko wartością przybliżoną (średnia liczona z szeregu szczegółowego z przykładu 5 jest równa $21,8$).

Słownik

średnia ważona arytmetyczna

średnia ważona arytmetyczna liczb $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ z odpowiadającymi im odpowiednio wagami $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ to liczba $\bar{x}_w$ określona wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

gdzie:
$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ – są liczbami dodatnimi

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj materiał zawarty w animacji. Zastanów się, czy w każdym przypadku można obliczać średnią ważoną w sposób uproszony.

Zwróć uwagą na analogie i różnice między średnią ważoną, a średnią arytmetyczną.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dv4PYinwS

Animacja rozpoczyna się od ekranu podzielonego na dwie części: w części lewej znajduje się kartka w kratkę, po prawej stronie mamy wyniki eliminacji do turnieju tańca nowoczesnego w kategorii Standard. Liczba punktów x i : dwa, cztery, sześć, osiem. Liczba par tanecznych n i: siedem, osiemnaście, dziewięć, sześć. Częstość p i: zero przecinek sto siedemdziesiąt pięć, zero przecinek czterdzieści pięć, zero przecinek dwieście dwadzieścia pięć, zero przecinek piętnaście. Na kartce w kratkę po lewej stronie pojawia się napis. Sposób jeden: Obliczymy średnią ważoną liczby punktów zdobytych przez pary uczestniczące w turnieju. Średnia ważona x równa się dwa razy siedem dodać cztery razy osiemnaście dodać sześć razy dziewięć dodać osiem razy sześć, całość podzielona przez siedem dodać osiemnaście dodać dziewięć dodać sześć. Średnia ważona x równa się sto osiemdziesiąt osiem podzielić przez czterdzieści. Średnia ważona x równa się cztery przecinek siedem punktów. Sposób dwa: Obliczymy teraz w inny sposób średnią ważoną liczby punktów. Zero przecinek sto siedemdziesiąt pięć dodać zero przecinek czterdzieści pięć dodać zero przecinek dwieście dwadzieścia pięć dodać zero przecinek piętnaście równa się jeden. Średnią ważoną wyznaczymy jako sumę iloczynów punktów i częstości. Średnia ważona x równa się dwa razy zero przecinek sto siedemdziesiąt pięć dodać cztery razy ero przecinek czterdzieści pięć dodać sześć razy zero przecinek dwieście dwadzieścia pięć dodać osiem razy zero przecinek piętnaście. Średnia ważona x równa się zero przecinek trzydzieści pięć dodać jeden przecinek osiem dodać jeden przecinek trzydzieści pięć dodać jeden przecinek dwa. Średnia ważona x równa się cztery przecinek siedem punktów. Ważne. Jeśli dla zestawu danych statystycznych x jeden przecinek x dwa przecinek trzykropek przecinek x n częstość pi równa się n i podzielone przez n przyjmiemy jako wagi poszczególnych wartości, to średnia ważona zestawu danych jest równa średnia ważona w równa się pe jeden razy x jeden dodać p dwa x dwa dodać trzykropek dodać p n razy x n, gdzie p jeden dodać p dwa dodać trzykropek dodać p n równa się jeden. Kartka w kratkę jest czysta, po prawej stronie nie mamy wyniku eliminacji. Pole ekranu po prawej stronie jest puste. Po prawej stronie ekranu pojawiają się symbole chemiczne izotopu chloru o masie trzydzieści pięć i masie trzydzieści siedem.

Pojawia się też system chemiczny chloru z pustym polem masy. Na kartce pojawia się treść przykładu. Dwa izotopy chloru maja masy 35 i 27. Wyznacz masę atomową chloru, tworzonego w sposób naturalny jeżeli wiadomo, że składa się on z izotopów w stosunku trzy podzielić przez jeden. Średnia ważona x równa się x jeden razy w jeden dodać x dwa dodać w dwa, całość podzielić przez w jeden dodać w dwa., gdzie x jeden równa się trzydzieści pięć, x dwa wazy trzydzieści siedem, w jeden wynosi trzy, w dwa wynosi jeden. Szukana wielkość to średnia ważona. Średnia ważona x równa się trzydzieści pięć razy trzy dodać trzydzieści siedem razy jeden, całość podzielić przez trzy dodać jeden. Trzy i jeden oznaczone są jako wagi. Średnia ważona x równa się sto pięć dodać trzydzieści siedem, całość podzielić przez cztery. Średnia ważona x równa się sto czterdzieści dwa podzielić przez cztery. Średnia ważona x równa się trzydzieści pięć przecinek pięć. Masa atomowa chloru jest równa trzydzieści pięć i pięć dziesiątych.

Polecenie 2

Oblicz, w taki sposób jak pokazano to w animacji, średnią ważoną zestawu liczb 4, 12, 16 z wagami odpowiednio $(0{,}1)$, $(0{,}2)$ i $(0{,}7)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Rodzina państwa Piotrowskich chce pojechać na zagraniczną wycieczkę. W tabelce wpisano dane na temat rozważanych przez Piotrowskich wycieczek. Uzupełnij tabelkę, przeciągając odpowiednie liczby w prawidłowe miejsca oraz nazwę miasta, do którego powinni pojechać Piotrowscy.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Zważono losowo wybrane tabliczki czekolady, produkowanej w pewnej fabryce. Otrzymane dane zamieszczono w tabeli.

Masa tabliczki czekolady (w g)	Liczba tabliczek czekolady (w $szt.$)
120	5
100	10
98	35

Ćwiczenie 7

Agata wybrała się do babci, która mieszkała w odległości $120\ \mathrm{km}$. Połowę drogi jechała autostradą z prędkością $120\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, a połowę szosą z prędkością $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Uzupełnij obliczenia średniej prędkości, z jaką jechała Agata. Przeciągnij odpowiednie liczby.

Ćwiczenie 8

Uczniowie pewnej klasy pisali klasówkę z języka polskiego. Dwóch uczniów otrzymało stopień dopuszczający, 40% uczniów otrzymało stopień dobry, $\frac{1}{5}$ dostała stopień bardzo dobry, a pozostali otrzymali stopień dostateczny.

Oblicz, ilu uczniów otrzymało stopień dostateczny, jeżeli średnia ocen wynosiła $3,7$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Średnia ważona

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza średnią ważoną zestawu danych pogrupowanych w różny sposób
- interpretuje wyniki uzyskane po wyznaczeniu średniej ważonej
- analizuje sytuacje z życia codziennego i dobiera modele matematyczne do ich rozwiązania
- ocenia przydatność różnych sposobów wyznaczania średniej arytmetycznej do rozwiązania danego problemu teoretycznego i praktycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja

- gwiazda pytań
- artefakty

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie sposób wyznaczania średniej arytmetycznej.

Faza wstępna:

Dyskusja – idealny system oceniania uczniów – jaki powinien być.

Uczniowie wspólnie wypracowują idealny, ich zdaniem system oceniania, uwzględniający oceny liczbowe. Następnie każdy z uczniów ma za zadanie policzyć swoją średnią ocen z matematyki, uwzględniając obecną punktację oraz proponowaną.

Rozmowa – czy uzyskane oceny różnią się i dlaczego.

Uczniowie podają też sposoby, które pozwoliły im na wyznaczenie średniej ocen w każdym przypadku.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem zapisanym w sekcji Przeczytaj i z animacją.

Praca metodą artefaktów – zadaniem grup jest zmodyfikowanie sposobu wyznaczania średniej ważonej tak, aby obliczenia prowadziły do wyznaczania średniej arytmetycznej. Mają podać też przykłady zestawów liczb (lub sytuacji) wyznaczania średniej wartości, bez stosowania formalnych wzorów na średnie.

Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, tworząc przy tym gwiazdę pytań. Czyli zapisując na ramionach gwiazdy pytania, które nasunęły się im w trakcie rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości zapisane na ramionach gwiazd, wybrani uczniowie podsumowują zajęcia. Uczniowie wspólnie podają co najmniej 4 przykłady zastosowania średniej ważonej w sytuacjach życia codziennego.

Uczniowie oceniają prace swoich grup – według stworzonego wcześniej modelu oceniania.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest zebranie danych na temat cen tej samej paczki masła w kilkunastu sklepach i wyznaczenie średniej ważonej cen masła.

Materiały pomocnicze:

Średnia arytmetyczna i mediana zestawu danych

Wskazówki metodyczne:

Animacja może posłużyć jako podsumowanie zajęć lub jako przypomnienie sposobu wyznaczania średniej ważonej, w momencie podsumowywania wiadomości ze statystyki.