Wykorzystanie cech podobieństwa trójkątów

Wykorzystanie cech podobieństwa trójkątów

Źródło: andreadevisser tarafından Pixabay, domena publiczna.

Podobieństwo trójkątów jest często wykorzystywanym narzędziem matematycznym do rozwiązywania zadań z geometrii i to zarówno w prostych sytuacjach, jak i też w sytuacjach problemowych, w szczególności do prowadzenia dowodów geometrycznych.

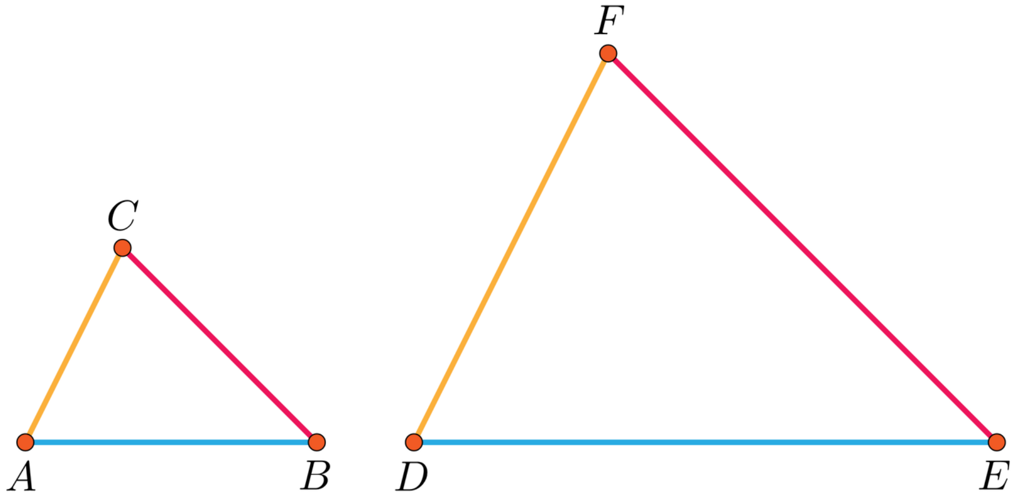
Twoje cele

- Zastosujesz cechy podobieństwa trójkątów do obliczania boków trójkątów podobnych w danej skali.
- Wykorzystasz podobieństwo trójkątów do rozwiązywania zadań.
- Zastosujesz cechy podobieństwa trójkątów do uzasadniania podobieństwa trójkątów.
- Wykorzystasz zależności między obwodami trójkątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań.
- Wykorzystasz zależności między polami trójkątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań.
- Zastosujesz cechy podobieństwa trójkątów w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że z definicji figur podobnych wynika, że jeśli trójkąt DEF jest obrazem trójkąta ABC w podobieństwie o skali $s > 0$, przy czym punkty D, E i F są obrazami punktów odpowiednio A, B i C w tym podobieństwie, to

$$|DE| = s \cdot |AB| \text{ i } |EF| = s \cdot |BC| \text{ i } |DF| = s \cdot |AC|$$



Równości te możemy zapisać w postaci

$$s = \frac{|DE|}{|AB|} \text{ i } s = \frac{|EF|}{|BC|} \text{ i } s = \frac{|DF|}{|AC|}$$

Możemy zatem powiedzieć, że skala podobieństwa trójkątów to stosunek długości boku trójkąta będącego obrazem do boku trójkąta wyjściowego. Pokażemy, że skalę podobieństwa trójkątów możemy wyznaczyć, obliczając stosunek długości innych odpowiadających sobie wielkości w tych trójkątach, na przykład obwodów tych trójkątów.

Ponieważ

$$L_{DEF} = |DE| + |EF| + |DF| = s \cdot |AB| + s \cdot |BC| + s \cdot |AC| =$$

$$= s \cdot (|AB| + |BC| + |AC|) = s \cdot L_{ABC}$$

więc

$$s = \frac{L_{DFF}}{L_{ABC}}$$

Podobnie możemy wykazać, że skala podobieństwa trójkąta DEF do trójkąta ABC jest równa stosunkowi opowiadających sobie wysokości tych trójkątów lub stosunkowi długości odpowiadających sobie środkowych.

Zauważmy też, że jeżeli skala podobieństwa trójkąta DEF do trójkąta ABC jest równa s, to skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta DEF jest równa $\frac{1}{s}$.

Pokażemy teraz ważną własność pól trójkątów podobnych.

Twierdzenie: Twierdzenie o stosunku pól trójkątów podobnych

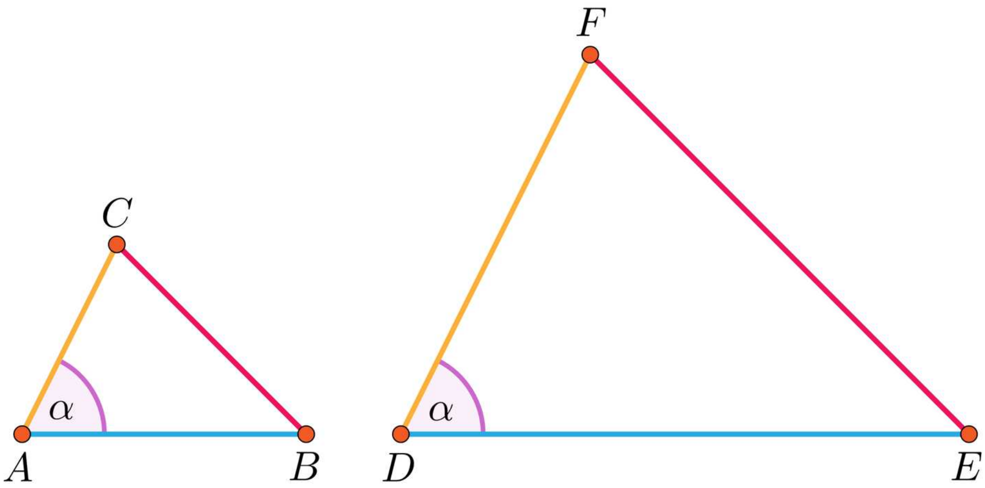
Stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych trójkątów.

Dowód

Niech $s > 0$ będzie skalą podobieństwa trójkąta DEF do trójkąta ABC.

Wówczas $|DE| = s \cdot |AB|$ i $|DF| = s \cdot |AC|$.

Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$.



Stosunek pól trójkątów DEF i ABC jest równy

$$\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}|DE| \cdot |DF| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha} = \frac{s \cdot |AB| \cdot s \cdot |AC|}{|AB| \cdot |AC|} = s^2$$

To kończy dowód.

Ta sama własność jest też prawdziwa w przypadku dowolnych figur podobnych. Jej dowód w przypadku wielokątów wynika z faktu, że każdy wielokąt można podzielić na parami rozłączne trójkąty.

Nie trudno też zauważyć, że stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi ich skali podobieństwa.

Szczególnym przypadkiem figur podobnych są figury przystające. Skala ich podobieństwa jest równa 1.

Relacja podobieństwa figur jest:

- Zwrotna, tzn. każda figura jest podobna do samej siebie. Możemy to zapisać $f \sim f$.

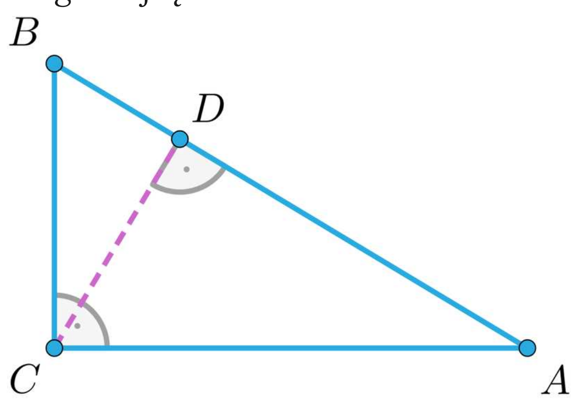
- Symetryczna, tzn. jeżeli figura f jest podobna do figury g, to figura g jest podobna do figury f. Możemy to zapisać: jeżeli $f \sim g$, to $g \sim f$.

- Przechodnia, tzn. jeżeli figura f jest podobna do figury g i figura g jest podobna do figury h, to figura f jest podobna do figury h. To możemy zapisać: jeżeli $f \sim g$ i $g \sim h$, to $f \sim h$.

Pokażemy kilka przykładów, w których wykażemy, że trójkąty są podobne lub wykorzystamy podobieństwo trójkątów.

Przykład 1

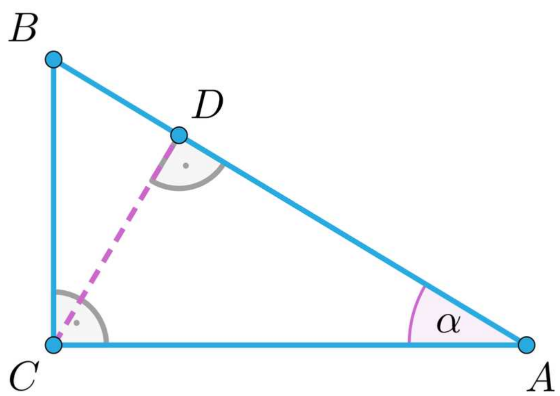
Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt D jest spodkiem wysokości CD opuszczonej z wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.



Wykaż, że trójkąty ABC, ACD i CBD są podobne.

Rozwiązanie

Oznaczmy $|\sphericalangle CAB| = \alpha$.



Trójkąty ADC i ABC są prostokątne, mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A, więc z twierdzenia o sumie kątów trójkąta otrzymujemy
$|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ oraz
$|\sphericalangle ACD| = 180^\circ - |\sphericalangle CDA| - |\sphericalangle CAD| = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$.

Zatem $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$.

Zatem z cechy *kkk* wynika, że trójkąty ADC i ABC są podobne.

Trójkąt CBD jest prostokątny oraz $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$, więc z twierdzenia o sumie kątów trójkąta otrzymujemy
$|\sphericalangle DCB| = 180^\circ - |\sphericalangle CDB| - |\sphericalangle DBC| = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

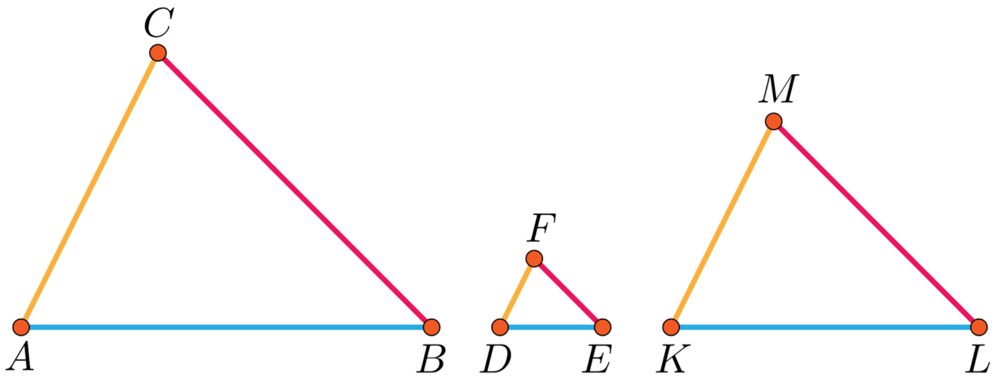
Wobec tego kąty trójkąta CBD są takie same jak kąty trójkątów ADC i ABC, co oznacza, że trójkąt CBD jest podobny do każdego z trójkątów ADC i ABC.

To należało wykazać.

Przykład 2

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF w skali 4, trójkąt KLM jest podobny do trójkąta DEF w skali 3. Oblicz skalę podobieństwa trójkąta KLM do trójkąta ABC.

Rozwiązanie



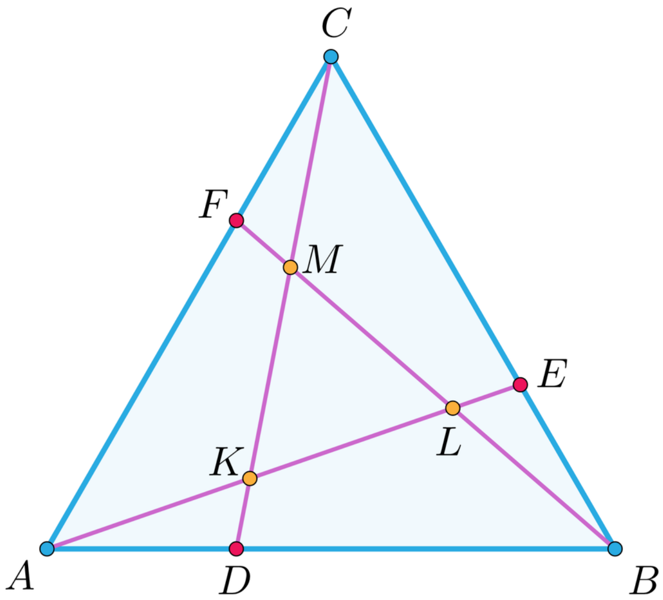
Ponieważ skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta DEF jest równa 4, więc $|AB| = 4 \cdot |DE|$.

Skala podobieństwa trójkąta KLM do trójkąta DEF jest równa 3, więc $|KL| = 3 \cdot |DE|$.

Skala podobieństwa trójkąta KLM do trójkąta ABC jest równa $\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{3 \cdot |DE|}{4 \cdot |DE|} = \frac{3}{4}$.

Przykład 3

Trójkąt ABC jest równoboczny. Punkty D, E i F leżą na bokach odpowiednio AB, BC i AC tego trójkąta oraz $|AD| : |DB| = |BE| : |EC| = |CF| : |FA| = 1 : 2$. Odcinki AE, BF i CD wyznaczają trójkąt KLM, jak na rysunku.



Wykaż, że trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC i oblicz skalę tego podobieństwa.

Rozwiązanie

Aby wykazać, że trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC wystarczy wykazać, że trójkąt KLM jest równoboczny.

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC. Wtedy

$|AD| = |BE| = |CF| = \frac{1}{3}a$ oraz $|BD| = |CE| = |AF| = \frac{2}{3}a$.

Stąd i z równości $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = 60^\circ$ wynika, na mocy cechy *bkb*, że trójkąty ABE, BCF i CAD są przystające. Stąd otrzymujemy

$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle CDA|$ oraz $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CBF| = |\sphericalangle ACD|$.

To z kolei, wraz z równością $|AD| = |BE| = |CF|$, oznacza, że trójkąty ADK, BEL i CFM są przystające (cecha *kbk*).

Wobec tego $|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle BLE| = |\sphericalangle CMF|$.

Ponieważ $|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle MKL|$, $|\sphericalangle BLE| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle CMF| = |\sphericalangle LMK|$, gdyż są to pary kątów wierzchołkowych, więc $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMK|$.

Zatem trójkąt KLM jest równoboczny.

Obliczmy teraz skalę podobieństwa tego trójkąta do trójkąta ABC. Skala ta jest równa stosunkowi długości boków tych trójkątów. Ponieważ trójkąt KLM jest równoboczny, więc $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMK| = 60^\circ$.

Trójkąt ADK jest podobny do trójkąta AEB, ponieważ: $|\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle BAE|$ (kąt wspólny), $|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ oraz $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BEA|$(cecha *kkk*).

Zatem $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{a}{\frac{1}{3}a} = 3$, skąd $|AK| = 3|KD|$, ale $|KD| = |LE|$, więc $|AK| = 3|LE|$.

Trójkąty ALF i ACE są podobne, gdyż mają wspólny kąt przy wierzchołku A oraz $|\sphericalangle ALF| = |\sphericalangle ACE| = 60^\circ$.

Zatem $\frac{|AL|}{|LF|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}$, skąd $|LF| = \frac{2}{3}|AL|$, ale $|LF| = |KE|$, więc $|KE| = \frac{2}{3}|AL|$.

Zatem $|KL| + |LE| = \frac{2}{3}(|AK| + |KL|)$. Stąd $\frac{1}{3}|KL| + |LE| = \frac{2}{3}|AK|$, czyli $\frac{1}{3}|KL| + |LE| = \frac{2}{3} \cdot 3|LE|$, więc $\frac{1}{3}|KL| = |LE|$, ale $|LE| = \frac{1}{3}|AK|$, wobec tego $|KL| = |AK| = 3|LE|$.

Zatem $|KL| = \frac{3}{7}|AE|$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABE otrzymujemy

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BE| \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2$$

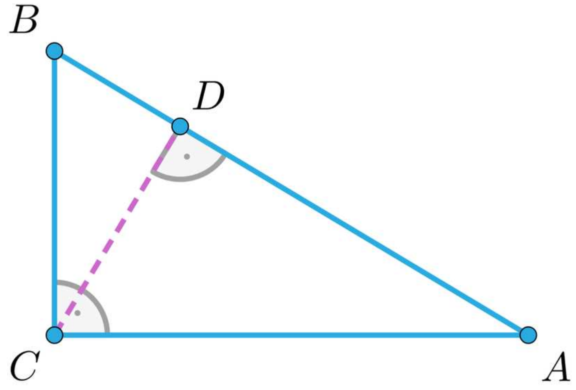
Stąd $|AE| = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Wobec tego $|KL| = \frac{3}{7} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Zatem skala podobieństwa trójkąta KLM do trójkąta ABC jest równa $\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{7}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Przykład 4

Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt D jest spodkiem wysokości CD opuszczonej z wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.



Udowodnij, że obwody trójkątów ACD, CBD i ABC spełniają równość

$$(L_{ACD})^2 + (L_{CBD})^2 = (L_{ABC})^2.$$

Dowód

Trójkąty ACD, CBD i ABC są podobne, co wykazaliśmy w przykładzie 1. Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ACD, CBD, czyli

$P_{ABC} = P_{ACD} + P_{CBD}$.

Stąd, dzieląc obie strony tej równości przez P_{ABC}, otrzymujemy

$1 = \frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} + \frac{P_{CBD}}{P_{ABC}}$.

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych figur, a skala podobieństwa figur podobnych jest równa stosunkowi obwodów tych figur, więc powyższą równość możemy zapisać w postaci

$1 = \left(\frac{L_{ACD}}{L_{ABC}}\right)^2 + \left(\frac{L_{CBD}}{L_{ABC}}\right)^2$, czyli $1 = \frac{(L_{ACD})^2}{(L_{ABC})^2} + \frac{(L_{CBD})^2}{(L_{ABC})^2}$.

Stąd, mnożąc obie strony otrzymanej równości przez $(L_{ABC})^2$, otrzymujemy

$(L_{ABC})^2 = (L_{ACD})^2 + (L_{CBD})^2$.

To kończy dowód.

Słownik

spodek wysokości trójkąta

punkt wspólny wysokości i prostej, na którą ta wysokość została opuszczona

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią zadania pierwszego w poniższej animacji. Spróbuj je rozwiązać samodzielnie, a następnie sprawdź swój tok rozumowania z animacją. Wciśnij pauzę, gdy czas odtwarzania będzie równy $3:50$.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFV7BIcQi

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wykorzystania cech podobieństwa trójkątów.

Polecenie 2

Zapoznaj się z treścią drugiego zadania i wyjaśnieniami dotyczącymi tej treści. W tym celu obejrzyj fragment animacji od momentu, gdy czas odtwarzania będzie równy $3:50$ do momentu, gdy czas ten będzie równy $4:42$. Samodzielnie uzasadnij, że trójkąty ABO i DOC są podobne, a następnie wykorzystaj to w dalszym rozwiązywaniu zadania. Sprawdź swój tok rozumowania z animacją. Wciśnij pauzę w chwili $7:39$.

Polecenie 3

Zapoznaj się z treścią trzeciego zadania. W tym celu odtwórz animację od chwili $7:39$, wykonaj polecenia podane na filmie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

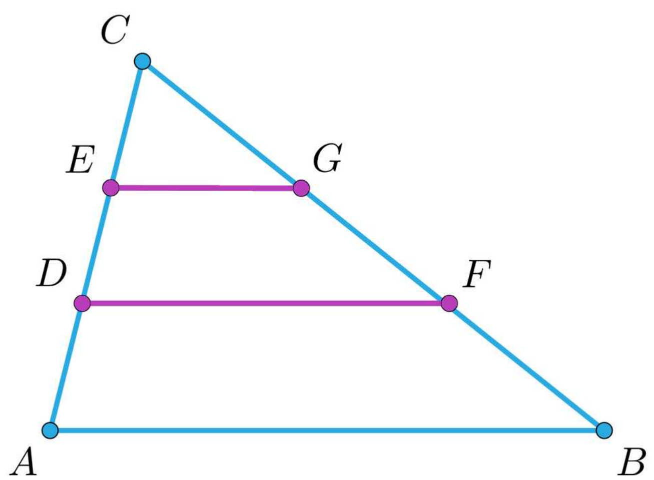
Ćwiczenie 3

Trójkąty ABC i DEF są podobne. Obwód trójkąta DEF jest o 20% mniejszy od obwodu trójkąta ABC. Oblicz skalę podobieństwa trójkąta DEF do trójkąta ABC.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC i dzielą ten bok na odcinki AD, DE i CE o równych długościach. Punkty F i G leżą na boku BC tego trójkąta i również dzielą ten bok na odcinki BF, FG i CG o równych długościach, jak na rysunku.



Ćwiczenie 6

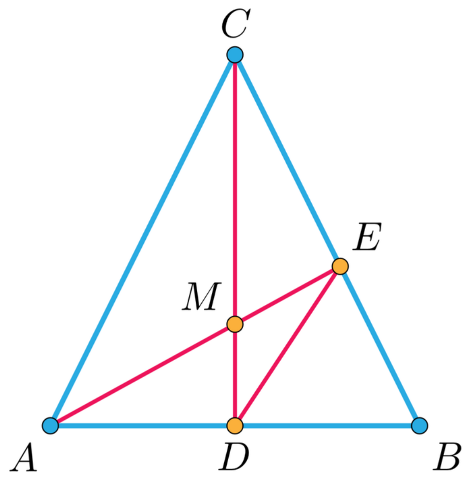
Pola dwóch trójkątów podobnych są równe 27 i 36. Promień okręgu opisanego na mniejszym z tych trójkątów jest równy 6. Oblicz skalę podobieństwa tych trójkątów oraz promień okręgu opisanego na większym z tych trójkątów.

Ćwiczenie 7

Obwód równoległoboku $ABCD$ jest równy 24, a stosunek długości obu wysokości tego równoległoboku jest równy $1:5$. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

Ćwiczenie 8

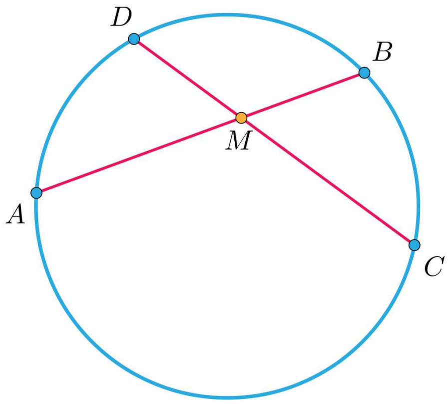
Wysokości CD i AE trójkąta równobocznego ABC przecinają się w punkcie M.



Wykaż, że trójkąty DEM i AED są podobne i skala tego podobieństwa jest równa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 9

Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie M.



Udowodnij, że $|AM| \cdot |BM| = |CM| \cdot |DM|$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie cech podobieństwa trójkątów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje cechy podobieństwa trójkątów do obliczania boków trójkątów podobnych w danej skali
- wykorzystuje podobieństwo trójkątów do rozwiązywania zadań
- stosuje cechy podobieństwa trójkątów do uzasadniania podobieństwa trójkątów
- wykorzystuje zależności między obwodami trójkątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań
- wykorzystuje zależności między polami trójkątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań
- stosuje cechy podobieństwa trójkątów w sytuacjach typowych i problemowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie cech podobieństwa trójkątów.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie wiadomości z lekcji geografii dotyczących skali mapy.
3. Po wykonaniu ćwiczeń wprowadzających nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia pojęcie skali podobieństwa figur, w szczególności skali podobieństwa trójkątów. Tak kieruje dyskusją, żeby uczniowie samodzielnie zauważyli, że skala podobieństwa figur jest równa stosunkowi odpowiadających sobie długości w tych figurach, w szczególności zwraca uwagę na to, że skala podobieństwa jest równa stosunkowi obwodów.
2. Nauczyciel pyta uczniów, czy stosunek pól trójkątów podobnych jest równy skali ich podobieństwa i tak steruje dyskusją, żeby uczniowie przynajmniej stwierdzili, że to stwierdzenie nie jest prawdziwe. Następnie pyta, czy jest jakaś zależność pomiędzy polami trójkątów podobnych, a skalą podobieństwa tych trójkątów.
3. Uczniowie w grupach, przy jak najmniejszej pomocy nauczyciela, formułują twierdzenie o stosunku pól trójkątów podobnych oraz przeprowadzają dowód tego twierdzenie (wykorzystują albo wzór na pole trójkąta z sinusem albo prowadzą odpowiednie wysokości w trójkątach podobnych i wykorzystują zwykły wzór na pole trójkąta).

4. Nauczyciel poleca uczniom uruchomić animację i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

Cechy podobieństwa trójkątów

Wskazówki metodyczne:

Zadania przedstawione w animacji mogą posłużyć do jako praca domowa do samodzielnej analizy uczniów.