Proste prostopadłe w przestrzeni

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Proste prostopadłe w przestrzeni

Źródło: Gilberto Olimpio, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji zajmiemy się zagadnieniem prostych prostopadłych w przestrzeni. Jeżeli każdy punkt leżący na jednej prostej należy też do drugiej prostej, to takie proste się pokrywają. Proste mogą również leżeć w jednej płaszczyźnie i przecinać się w jednym punkcie lub nie mieć punktów wspólnych (wtedy są równoległe). Istnieje również możliwość, że proste nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych (wtedy są skośne). Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

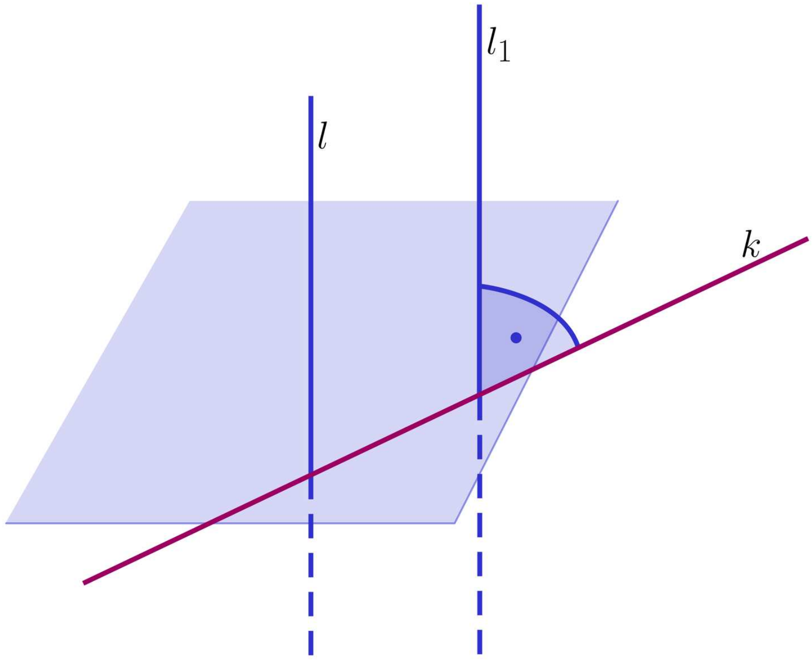
- Zdefiniujesz proste prostopadłe w przestrzeni.
- Rozpoznasz proste prostopadłe w przestrzeni.
- Określisz prostopadłość prostych w przestrzeni na podstawie ich równań.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Podajmy definicję, kiedy dwie proste są prostopadłe w przestrzeni.

Definicja: proste prostopadłe w przestrzeni

Mówimy, że dwie proste l i k w przestrzeni są prostopadłe, jeżeli istnieje prosta l_1 równoległa do prostej l i przecinająca prostą k pod kątem prostym.

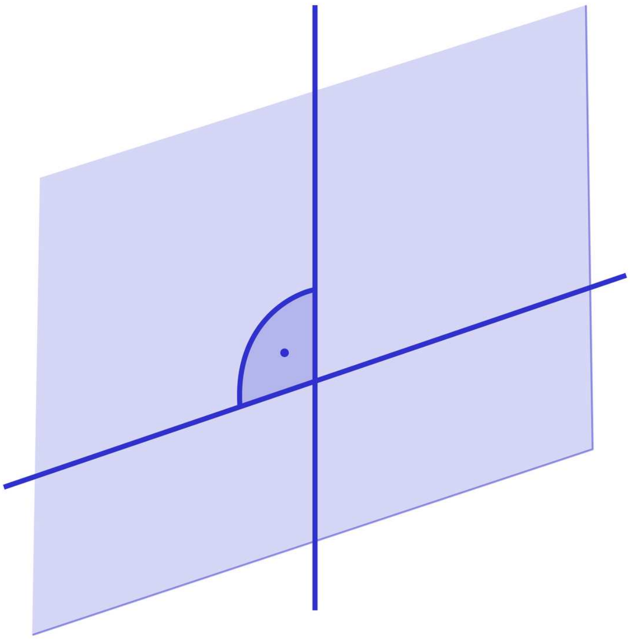


Ważne!

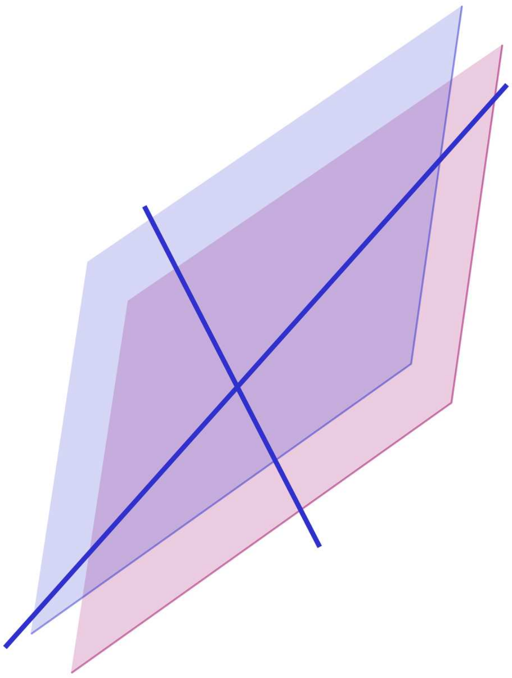
Proste, które są prostopadłe w przestrzeni przecinają się lub są skośne (nie leżą w jednej płaszczyźnie – nie mają punktów wspólnych).

Proste, które są prostopadłe w przestrzeni mogą być położone:

- w tej samej płaszczyźnie i przecinają się pod kątem 90°

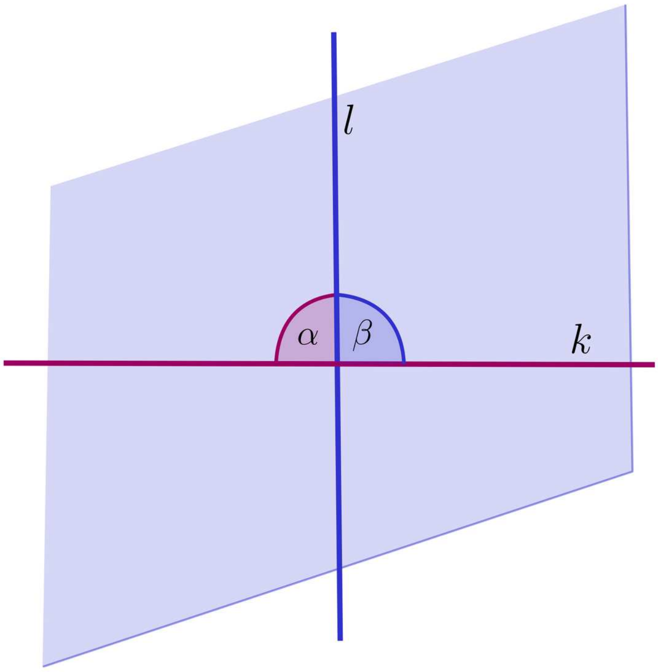


- w dwóch różnych płaszczyznach – są skośne i przecinają się pod kątem 90°



Przykład 1

Na rysunku przedstawiono proste k i l, które są zawarte w tej samej płaszczyźnie. Sprawdzimy, czy proste są prostopadłe, jeżeli wiadomo, że $\alpha = \frac{4}{5}\beta$.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\alpha + \beta = 180^{\circ}$.

Z warunków w zadaniu wynika, że $\alpha = \frac{4}{5}\beta$.

Zatem:

$\frac{4}{5}\beta + \beta = 180^{\circ}$

$\frac{9}{5}\beta = 180^{\circ}$

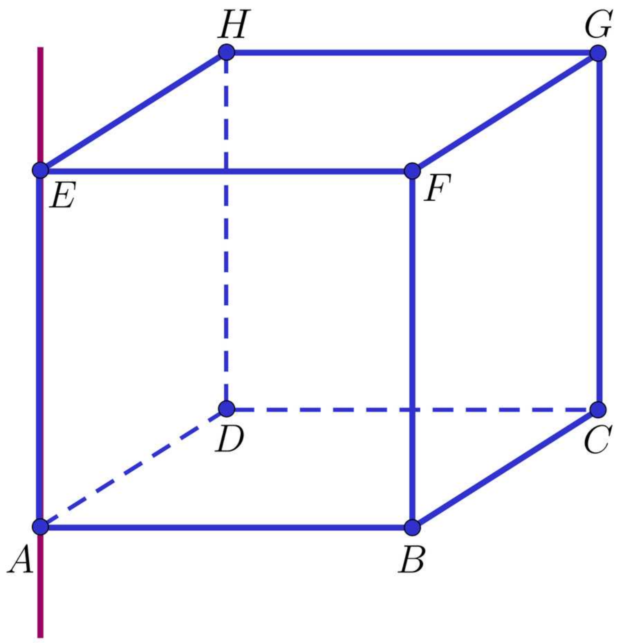
$\beta = 100^{\circ}$

Wobec tego $\alpha = 80^{\circ}$.

Ponieważ proste przecinają się pod kątem różnym od 90°, zatem nie są prostopadłe.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$. Wskażemy proste, zawierające pozostałe krawędzie sześcianu, które są prostopadłe do prostej zawierającej krawędź AE.



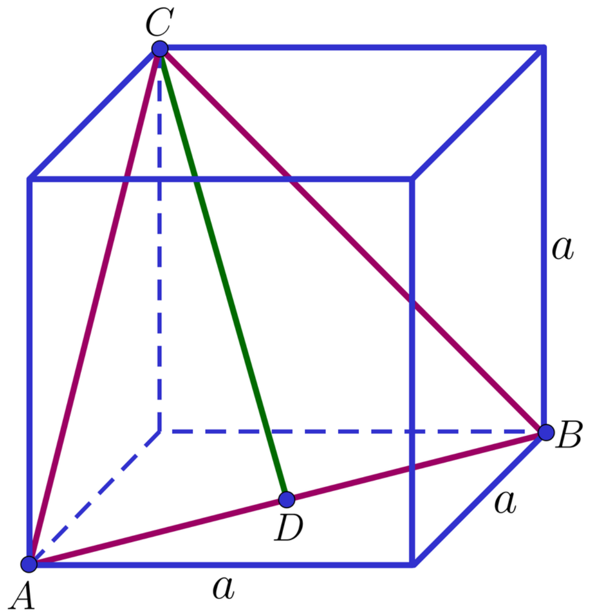
Rozwiązanie:

Proste, zawierające pozostałe krawędzie sześcianu, które są prostopadłe do prostej zawierającej krawędź AE sześcianu, to:

AD, AB, BC, CD, EH, EF, FG, GH.

Przykład 3

Wykażemy, że proste zawierające odcinki AB i CD są prostopadłe, jeżeli wiadomo, że punkt D jest środkiem odcinka AB w sześcianie, jak na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że odcinki AC i BC są równej długości, ponieważ są przekątnymi ścian sześcianu.

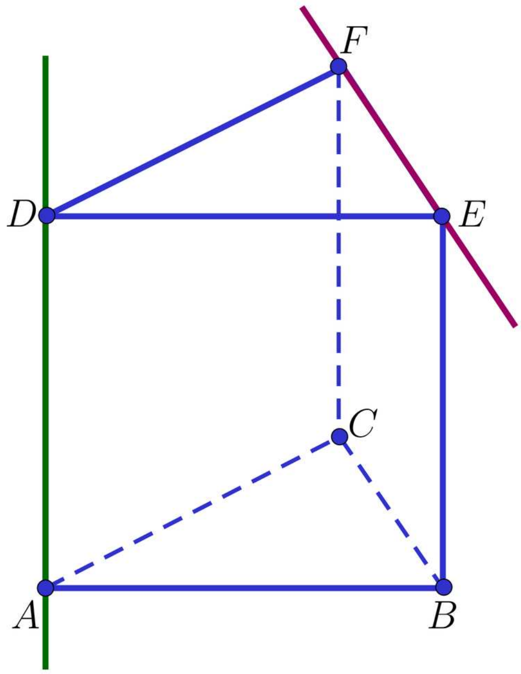
Zatem trójkąt ABC jest równoramienny.

Ponieważ punkt D jest środkiem odcinka AB, zatem odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC.

Wobec tego odcinki AB i CD są prostopadłe, co oznacza że proste zawierające te odcinki są także prostopadłe.

Przykład 4

Określimy, których prostych zawierających krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego z rysunku jest więcej: prostopadłych do prostej zawierającej krawędź AD, czy krawędź EF.



Rozwiązanie:

Proste prostopadłe do prostej zawierającej krawędź AD to: AB, AC, BC, DE, EF, DF.

Proste prostopadłe do prostej zawierającej krawędź EF to: CF, BE, AD.

Zatem prostych prostopadłych do prostej zawierającej krawędź AD jest o 3 więcej niż prostych prostopadłych do prostej zawierającej krawędź EF.

Ciekawostka

Jeżeli prosta przedstawia się za pomocą równania parametrycznego, to wówczas możemy badać prostopadłość prostych w przestrzeni za pomocą odpowiednich zależności.

Równanie parametryczne prostej:

Niech $P = (x_0, y_0, z_0)$ będzie punktem należącym do prostej l, która jest równoległa do wektora $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$.

Wówczas równanie parametryczne prostej l ma postać:

$$\begin{cases} x = x_o + t \cdot u_1 \\ y = y_o + t \cdot u_2 \\ z = z_o + t \cdot u_3 \end{cases} \text{, gdzie } t \in \mathbb{R} \text{ oraz } {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 > 0$$

> **Twierdzenie: o prostopadłości prostych w przestrzeni**
>
> Proste l_1 i l_2 o wektorach kierunkowych (równoległych do tych prostych) odpowiednio $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ i $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ są prostopadłe w przestrzeni wtedy, gdy iloczyn skalarny ich wektorów kierunkowych jest równy 0, czyli:
>
> $$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$$

Wobec tego proste o wektorach kierunkowych $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ i $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ są prostopadłe w przestrzeni wtedy, gdy zachodzi warunek:

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

> **Przykład 5**
>
> Wyznaczymy, dla jakich wartości parametru m proste l_1 i l_2 o wektorach kierunkowych $\overrightarrow{u} = [m, -m, 6]$ i $\overrightarrow{v} = [m, -1, -2]$ są prostopadłe.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Proste są prostopadłe, gdy iloczyn skalarny ich wektorów kierunkowych jest równy 0.
>
> Wobec tego:
>
> $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = [m, -m, 6] \circ [m, -1, -2] = m^2 + m - 12$
>
> Zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:
>
> $m^2 + m - 12 = 0$
>
> $\Delta = 1 - 4 \cdot (-12) = 49$
>
> $m_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$
>
> $m_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$
>
> Czyli $m \in \{-4, 3\}$.

Słownik

płaszczyzna

pojęcie pierwotne w geometrii Euklidesa

iloczyn skalarny

dwuargumentowa funkcja, przyporządkowująca dwóm danym wektorom przestrzeni liniowej pewną wartość liczbową

graniastosłup prawidłowy trójkątny

graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1HGztGSF

Polecenie 2

Sprawdź, czy proste l_1 i l_2 o wektorach kierunkowych odpowiednio $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są prostopadłe, jeżeli:

a) $\overrightarrow{u}=[3,-9,1]$ oraz $\overrightarrow{v}=[-2,4,-3]$

b) $\overrightarrow{u}=[3,-1,0]$ oraz $\overrightarrow{v}=[-4,-12,6]$

c) $\overrightarrow{u}=\left[4\sqrt{2},0,-2\right]$ oraz $\overrightarrow{v}=\left[-\sqrt{2},-10,-4\right]$

Polecenie 3

Zbuduj algorytm sprawdzający, czy proste k i l są prostopadłe, mając dane ich wektory kierunkowe: $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$ i $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$.

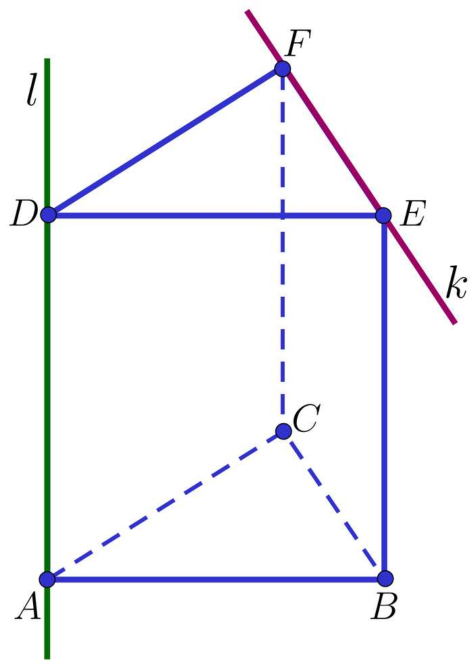
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

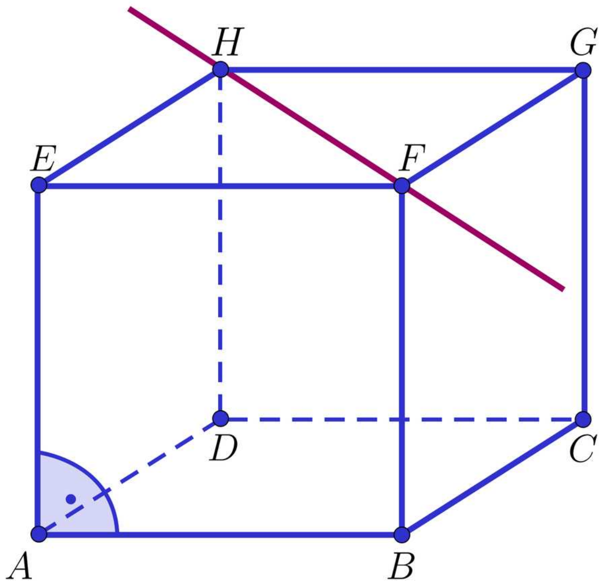
Ćwiczenie 2

Na podstawie poniższego rysunku zaznacz wszystkie zdania, które są prawdziwe.



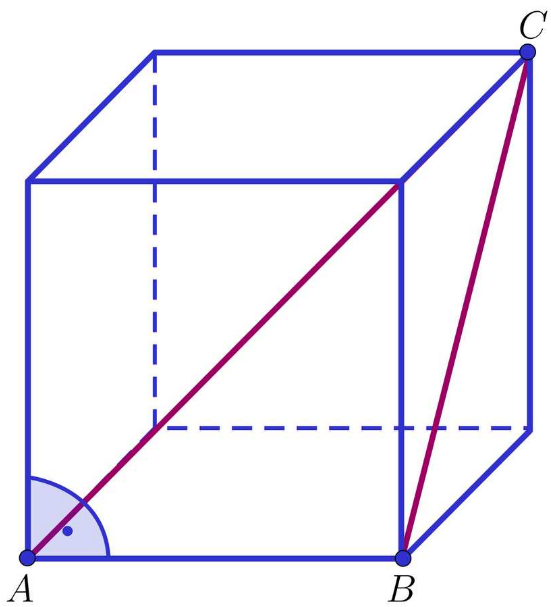
Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$, wraz z zaznaczoną prostą FH.



Ćwiczenie 4

Dany jest sześcian, jak na poniższym rysunku. Wykaż, że proste zawierające odcinki AC i AB nie są prostopadłe.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Połącz w pary wektory kierunkowe wyznaczające proste, które są prostopadłe w przestrzeni.

<math><mover><mi>v</mi><mo>→</mo></mover><mo>=</mo><mfenced open="[" close="]"><mrow><mo>-</mo><mn>3</mn><mo>,</mo><mn>4</mn><mo>,</mo><mfrac><mn>9</mn><mn>2</mn></mfrac></mrow></mfenced></math>, <math><mover><mi>v</mi><mo>→</mo></mover><mo>=</mo><mfenced open="[" close="]"><mrow><mo>-</mo><mn>6</mn><mo>,</mo><mo>-</mo><mn>10</mn><mo>,</mo><mn>7</mn></mrow></mfenced></math>, <math><mover><mi>v</mi><mo>→</mo></mover><mo>=</mo><mfenced open="[" close="]"><mrow><mo>-</mo><mn>1</mn><mo>,</mo><mo>-</mo><mn>4</mn><mo>,</mo><mn>0</mn></mrow></mfenced></math>, <math><mover><mi>v</mi><mo>→</mo></mover><mo>=</mo><mfenced open="[" close="]"><mrow><mn>4</mn><mo>,</mo><mo>-</mo><mn>10</mn><mo>,</mo><mo>-</mo><mn>6</mn></mrow></mfenced></math>

$\overrightarrow{u} = ”[”2, -3, 4”]”$	
$\overrightarrow{u} = ”[”0, -3, 5”]”$	
$\overrightarrow{u} = ”[”5, -3, 0”]”$	
$\overrightarrow{u} = ”[”8, -2, 4”]”$	

Ćwiczenie 8

Wyznacz, dla jakich wartości parametru m proste l_1 i l_2 o wektorach kierunkowych $\overrightarrow{u} = [m^2, 2m, 4m]$ i $\overrightarrow{v} = [m, -m, -2]$ są prostopadłe.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Proste prostopadłe w przestrzeni

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
Zakres rozszerzony 1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje proste prostopadłe w przestrzeni;
- rozpoznaje proste prostopadłe w przestrzeni;
- określa prostopadłość prostych w przestrzeni na podstawie ich równań;
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Proste prostopadłe w przestrzeni” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Proste prostopadłe w przestrzeni”).

Materiały pomocnicze:

- Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać w realizacji tematu „Miary kątów między płaszczyznami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym” lub na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy dotyczącej prostych prostopadłych w przestrzeni.