



## Pojęcie odległości punktu od prostej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Pojęcie odległości punktu od prostej

Źródło: Ondřej Košťál, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Omówiliśmy już szczegółowo pojęcie odległości dwóch punktów. Będzie to dla nas podstawą do zdefiniowania odległości punktu od prostej na płaszczyźnie euklidesowej oraz w prostokątnym układzie współrzędnych.

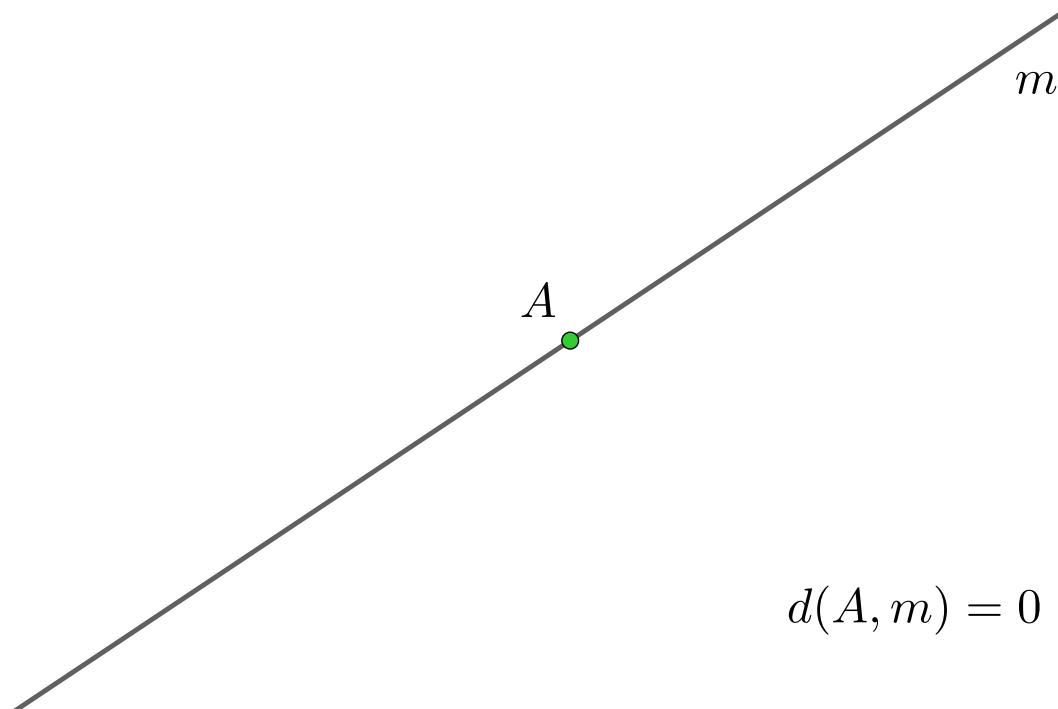
### Twoje cele

- Wyznaczysz odległość punktu od prostej na płaszczyźnie euklidesowej.
- Wyznaczysz odległość punktu od prostej w prostokątnym układzie współrzędnych.
- Zastosujesz poznane kryteria do rozwiązywania zadań dotyczących geometrii analitycznej.

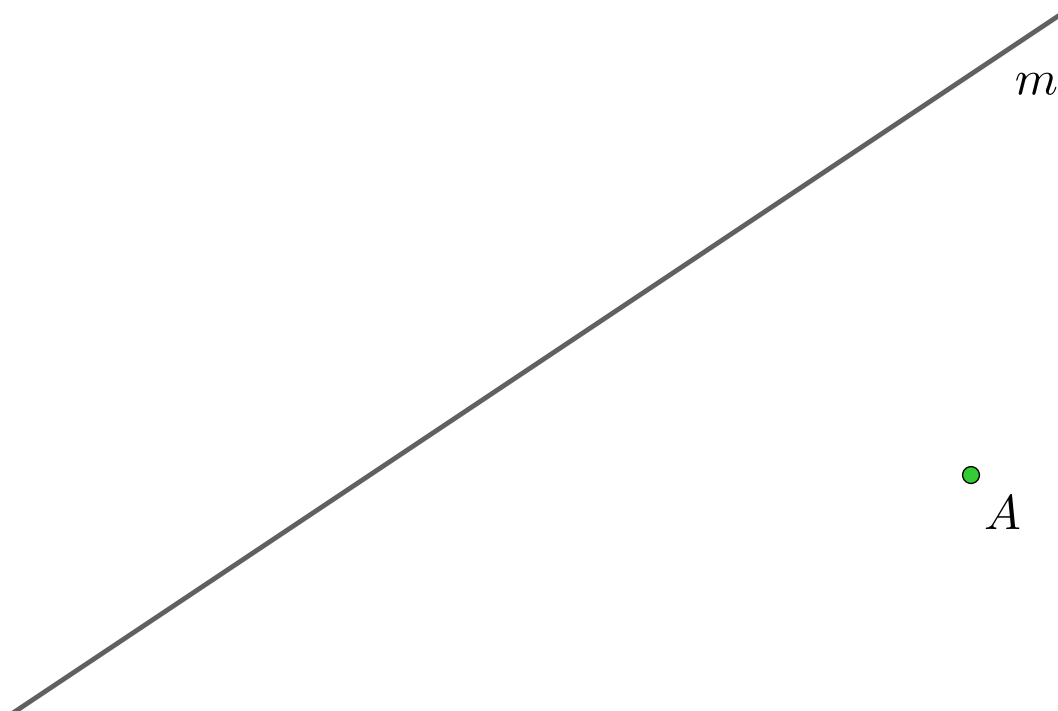
# Przeczytaj

---

Odległość punktu  $A$  od prostej  $m$  będziemy oznaczać  $d(A, m)$ .

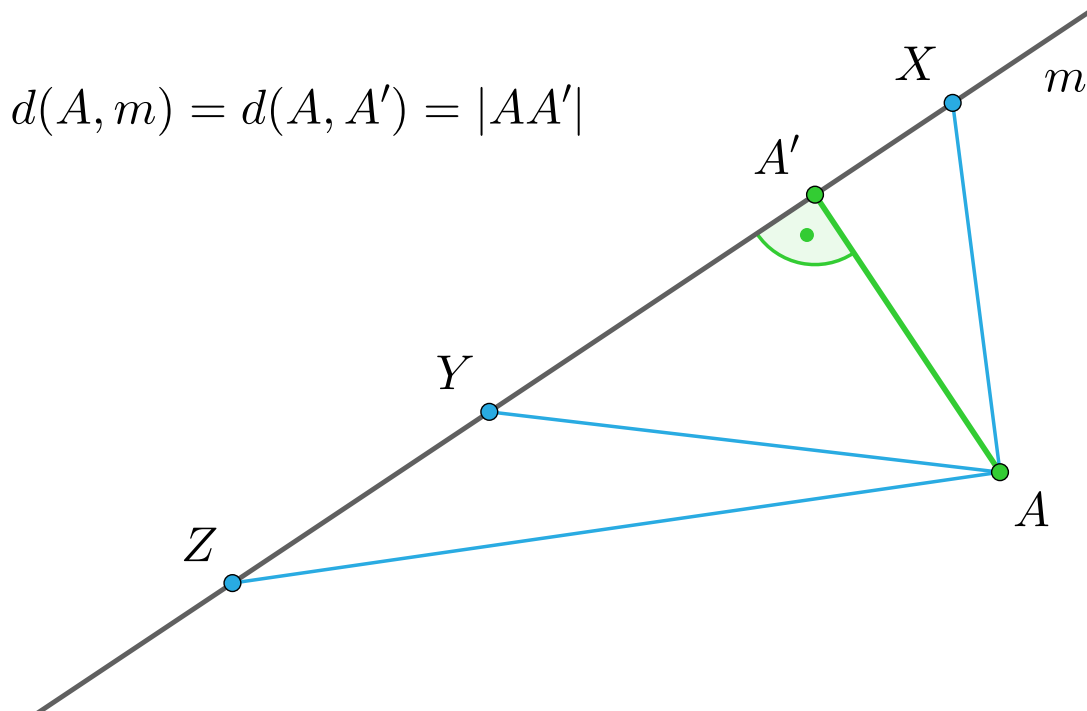


Jeżeli punkt  $A$  należy do prostej  $m$ , to jego odległość od tej prostej jest równa 0, czyli  $A \in m \Leftrightarrow d(A, m) = 0$ .



Jeżeli punkt  $A$  nie należy do prostej  $m$ , to odległość  $A$  od  $m$  jest równa długości najkrótszego spośród odcinków łączących punkt  $A$  z punktami prostej  $m$ .

Zauważmy, że ten najkrótszy odcinek jest do prostej  $m$  prostopadły.



Powyższa definicja obowiązuje również w przypadku płaszczyzny z układem współrzędnych.

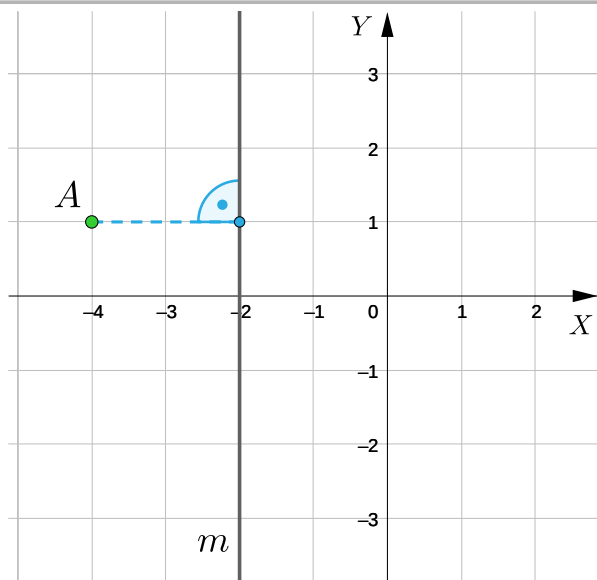
### Przykład 1

Określmy odległości punktów od prostych w kilku przypadkach:

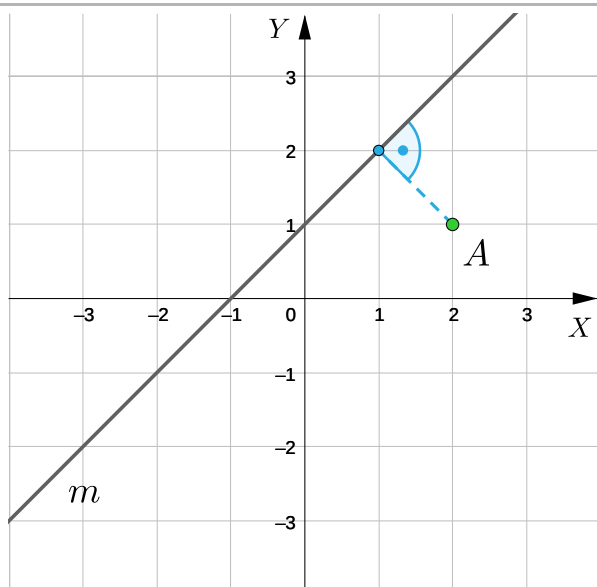
Ilustracja punktu $A$ i prostej $m$	Odległość punktu $A$ od prostej $m$
	$d(A, m) = 3$

### Ilustracja punktu $A$ i prostej $m$

### Odległość punktu $A$ od prostej $m$



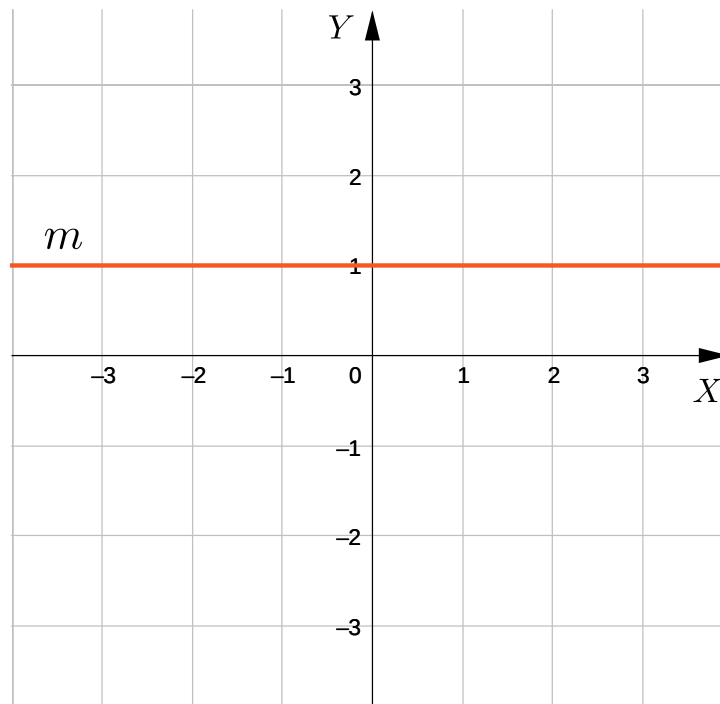
$$d(A, m) = 2$$



$$d(A, m) = \sqrt{2}$$

### Przykład 2

Dana jest prosta  $m$ . Wyznaczmy zbiór wszystkich punktów odległych od prostej  $m$  o dwie jednostki.

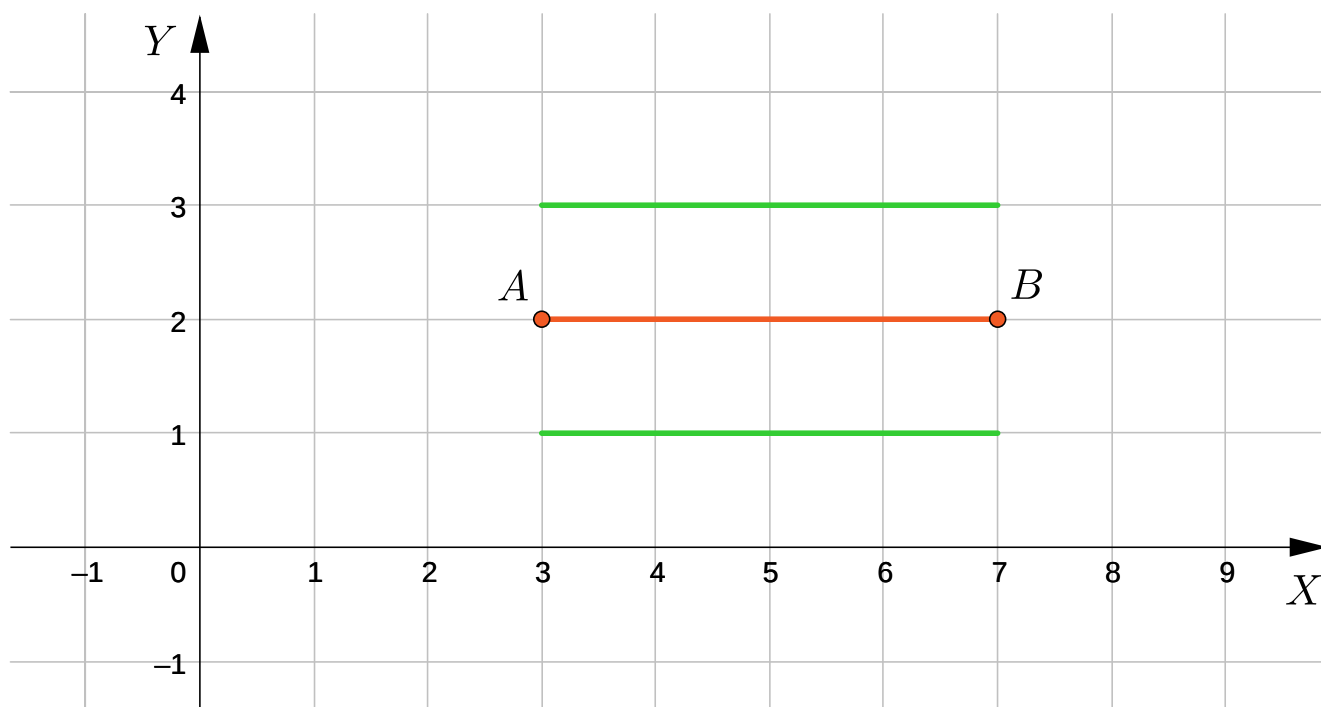


Prosta  $m$

### Przykład 3

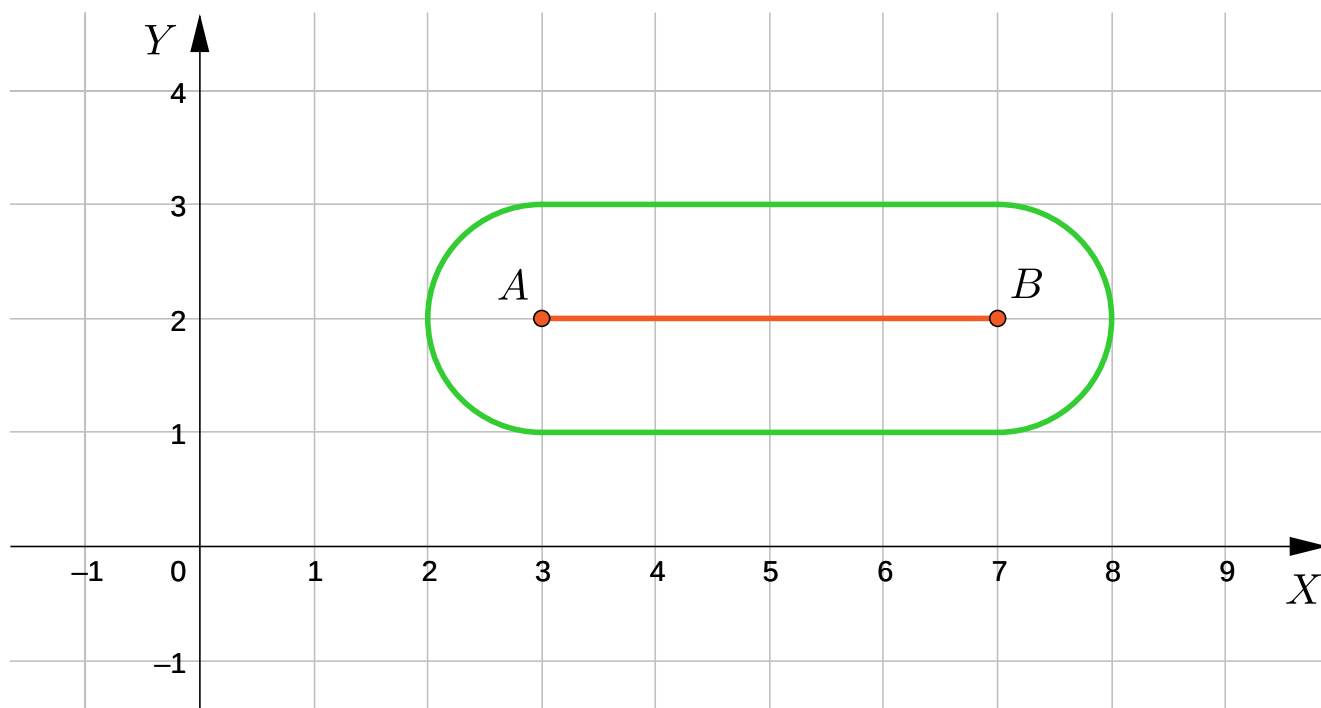
Wyznamy zbiór wszystkich punktów odległych od odcinka  $AB$  o jedną jednostkę.

Wiemy już, że wszystkie punkty odległe od prostej  $AB$  o jedną jednostkę tworzą dwie proste równoległe do prostej  $AB$  leżące po obu stronach prostej  $AB$ .



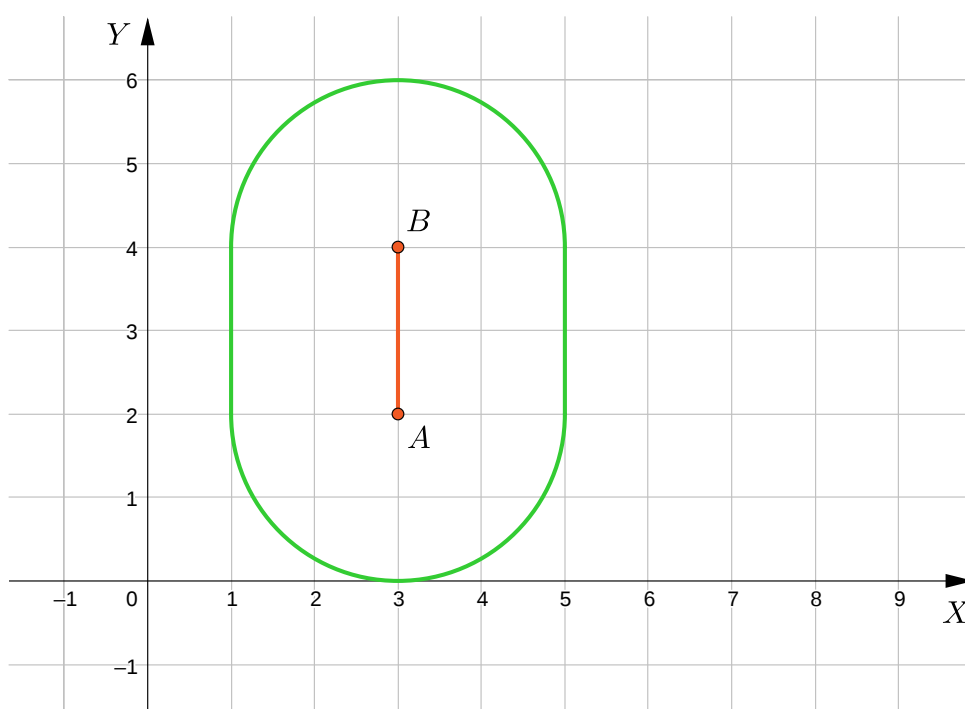
Z kolei zbiór wszystkich punktów odległych o jedną jednostkę od punktu  $A$  to okrąg o środku w punkcie  $A$  i promieniu 1. Analogicznie zbiór wszystkich punktów odległych

o 1 od punktu  $B$  to okrąg o środku w punkcie  $B$  i promieniu 1. Ponieważ nie rozważamy całej prostej, a jedynie odcinek  $AB$ , proste równoległe do prostej  $AB$  również ograniczymy do odcinków, zaś okręgi o środkach w punktach  $A$  i  $B$  do półokręgów otrzymując poniższy kształt.



#### Przykład 4

Analogicznie możemy wyznaczyć zbiór punktów odległych od odcinka  $AB$  o dwie jednostki: jest sumą odcinków równoległych do odcinka  $AB$  odległych od niego o dwie jednostki oraz półokręgów o środkach w punktach  $A$  i  $B$  i promieniach równych 2.



## Przykład 5

Znany jest wzór

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

na pole trójkąta o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ ,  $C = (x_C, y_C)$ .

Wyznamy odległość punktu  $A = (3, 2)$  od prostej przechodzącej przez punkty  $B = (-2, 1)$  i  $C = (1, -4)$ .

Zauważmy, że szukana odległość jest równa wysokości  $h_A$  trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $A$ . Z przytoczonego powyżej wzoru możemy obliczyć pole trójkąta  $ABC$ :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2 - 3)(-4 - 2) - (1 - 2)(1 - 3)| = 14$$

Pole trójkąta można również wyznaczyć jako połowa iloczynu długości podstawy i wysokości. Poszukujemy wysokości, ale długość podstawy możemy obliczyć ze wzoru na odległość dwóch punktów:

$$|BC| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Wynika stąd równanie:

$$\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_A = 14$$

czyli:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot h_A = 14$$

$$h_A = \frac{28}{\sqrt{34}} = \frac{28\sqrt{34}}{34} = \frac{14\sqrt{34}}{17}$$

Zatem odległość punktu  $A$  od prostej  $BC$  jest równa  $\frac{14\sqrt{34}}{17}$ .

## Ważne!

Zbiór wszystkich punktów spełniających dany warunek jest nazywany **miejszem geometrycznym** lub locus. Na przykład okrąg to zbiór punktów leżących w tej samej odległości od danego punktu; zbiór punktów równoodległych od punktów  $A$  i  $B$  to symetralna odcinka  $AB$ .

## Słownik

odległość punktu od prostej

długość najkrótszego spośród odcinków łączących punkt  $A$  z punktami prostej  $m$ ;  
odcinek ten jest prostopadły do danej prostej

**miejsce geometryczne**

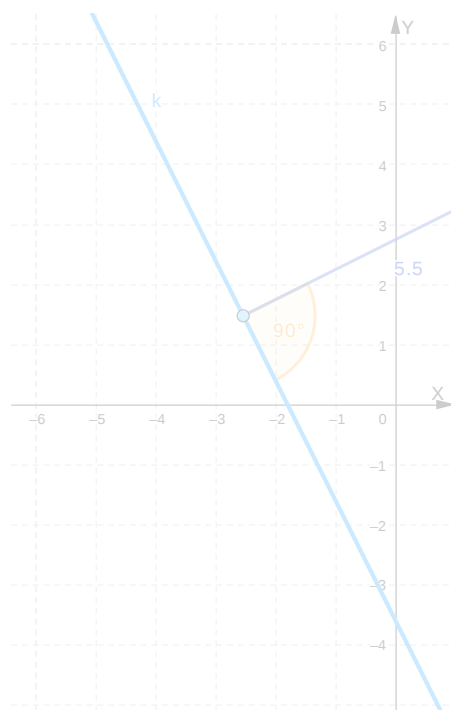
zbiór wszystkich punktów spełniający dany warunek

# Aplet

---

## Polecenie 1

Zmieniaj wartości współczynników równania prostej  $k$  opisanej równaniem  $ax + by + c = 0$ . Zaobserwuj jak zmienia się położenie punktu  $A$  oraz jego odległość od prostej  $k$ .






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbSVTDbQC>

## Polecenie 2

Wykorzystaj aplet. Ustaw wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$  aby otrzymać prostą o podanym równaniu. Odczytaj odległość punktu  $A$  od prostej  $k$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1

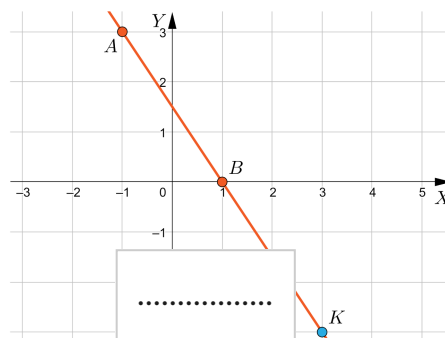
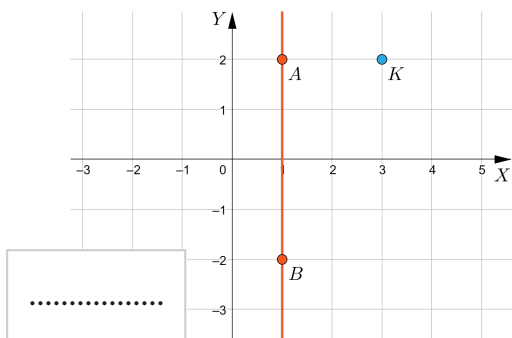
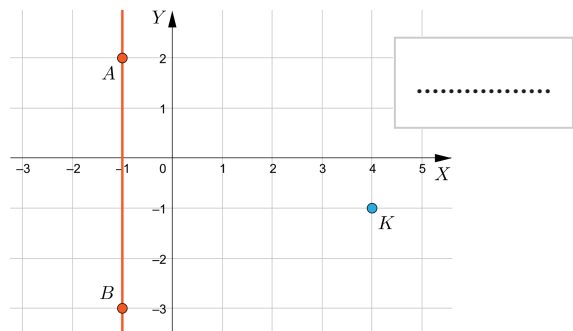
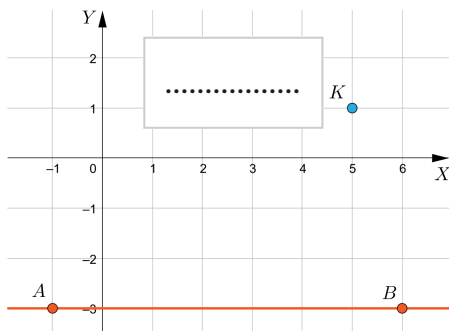
Wyznacz odległość punktu  $K$  od prostej  $AB$ .



Na ilustracjach przedstawiono położenie punktów  $K$ ,  $A$  i  $B$ .

Przecignij w odpowiednie miejsca poprawne odległości punktów  $K$  od prostych  $AB$ .

0, 5, 2, 4

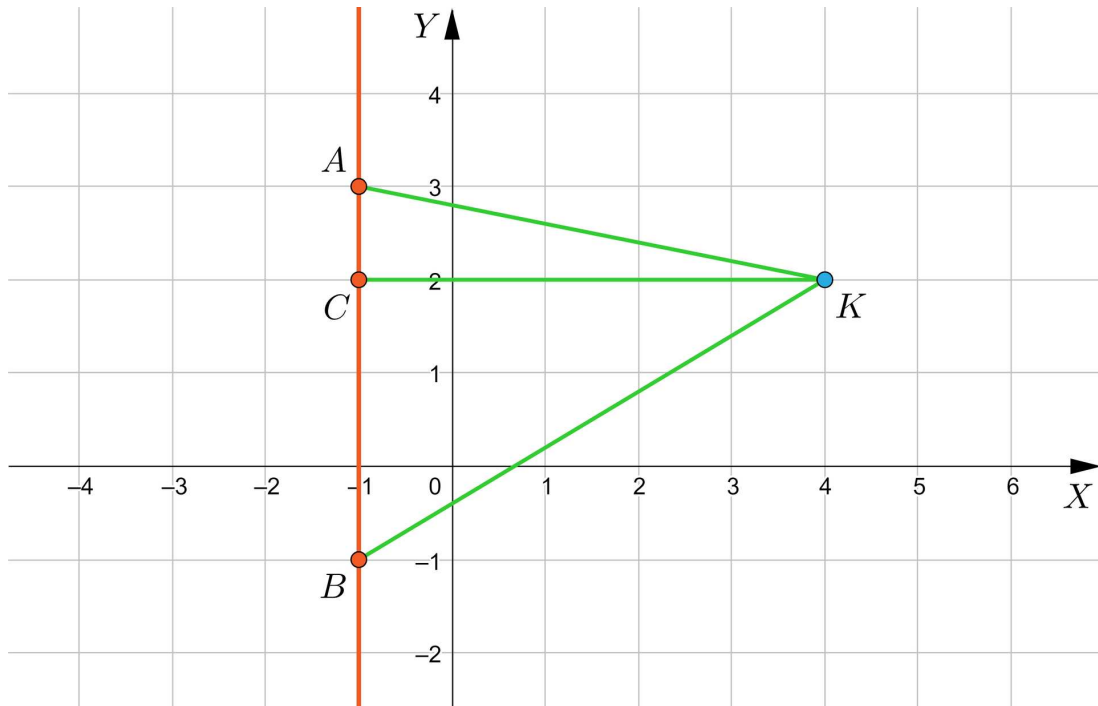


## Ćwiczenie 2



Wybierz odcinek, którego długość jest równa odległości punktu  $K$  od prostej. Wskaż poprawną odpowiedź.

a)



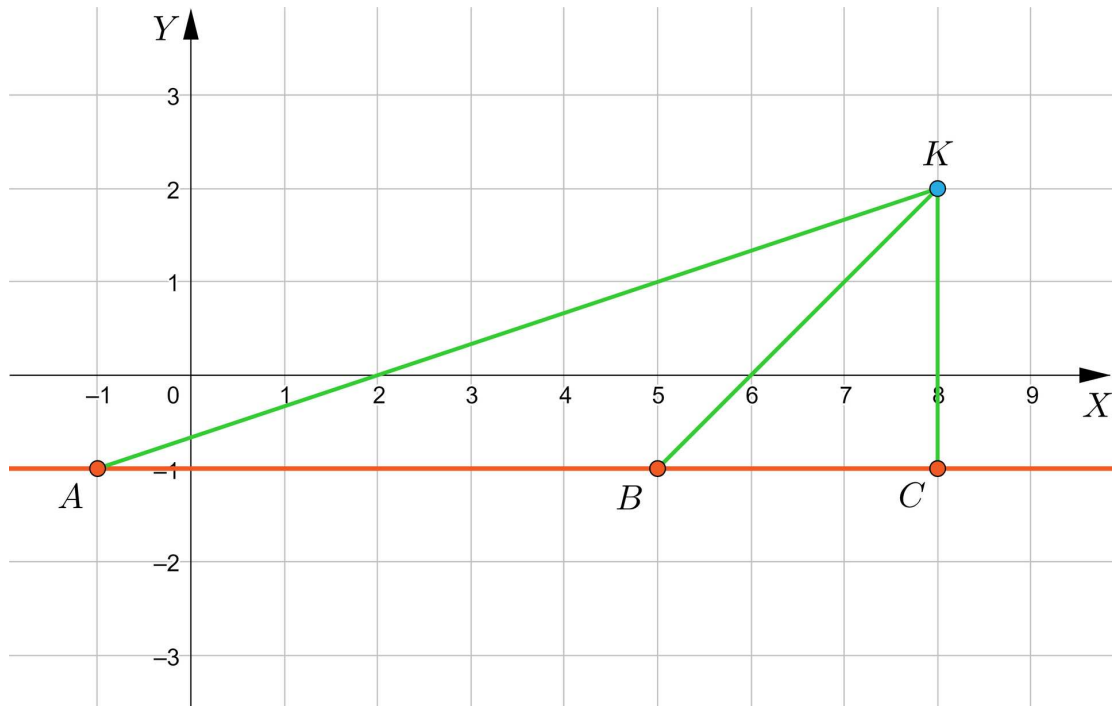
Odcinek, którego długość jest równa odległości punktu  $K$  od prostej  $AB$  to:

$CK$

$BK$

$AK$

b)



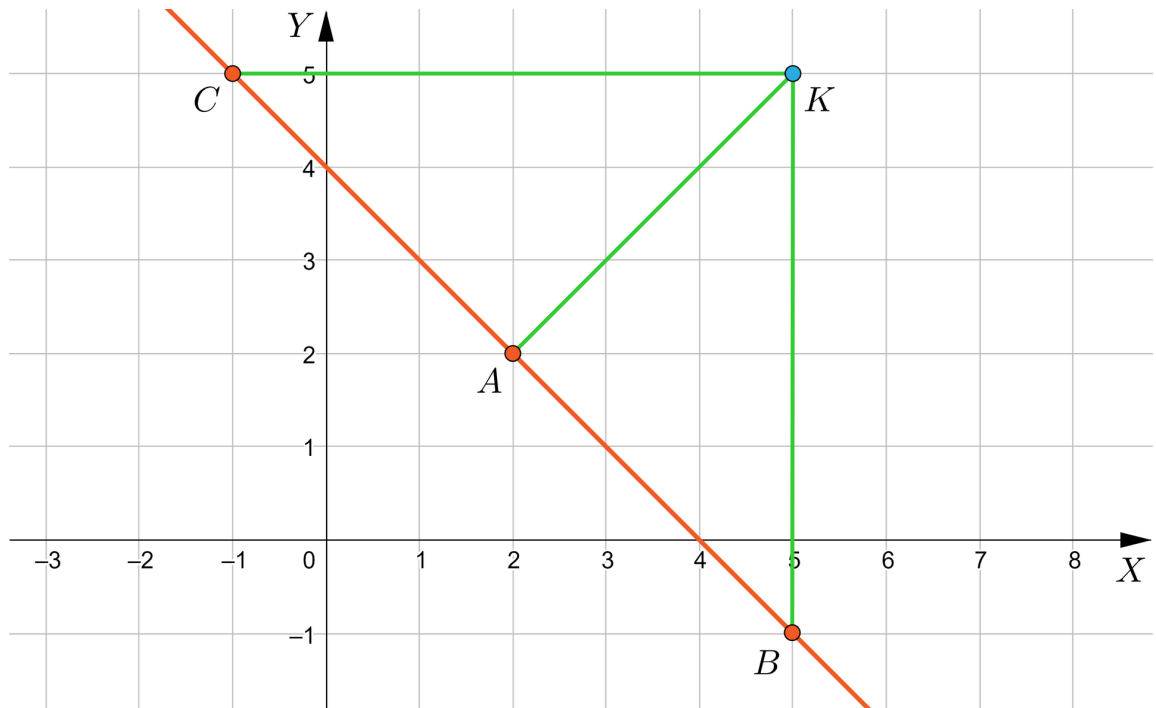
Odcinek, którego długość jest równa odległości punktu  $K$  od prostej  $AC$  to:

$CK$

$AK$

$BK$

c)



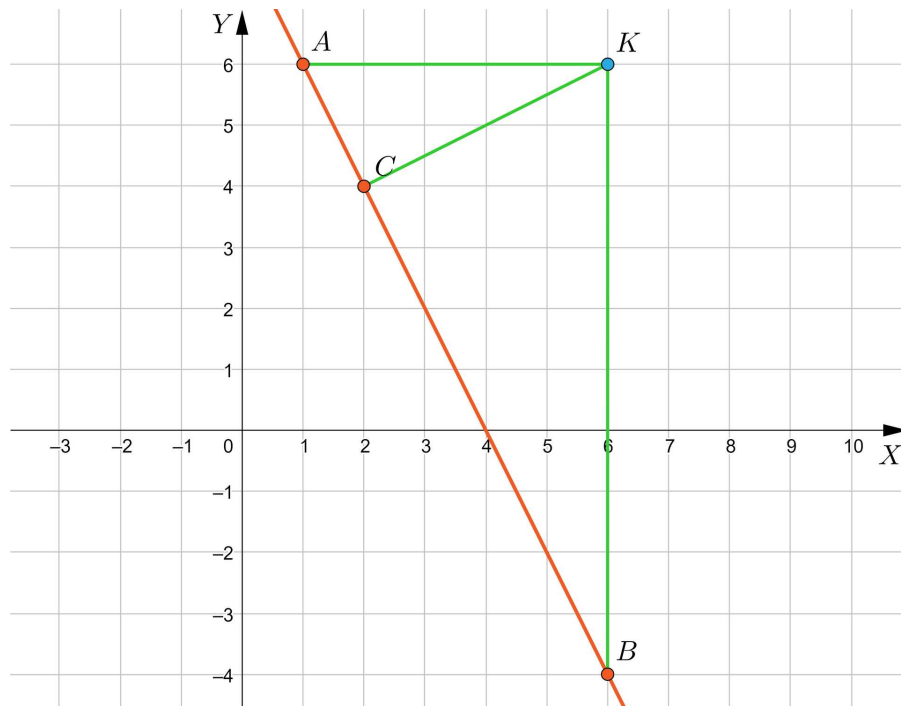
Odcinek, którego długość jest równa odległości punktu  $K$  od prostej  $AB$  to:

$CK$

$AK$

$BK$

d)



Odcinek, którego długość jest równa odległości punktu  $K$  od prostej  $AB$  to:

- $AK$
- $BK$
- $CK$

### Ćwiczenie 3



### Ćwiczenie 4



Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A = (-2, 6)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (0, -5)$ . Oblicz odległości wierzchołków tego trójkąta od prostych zawierających przeciwległe do nich boki.

## Ćwiczenie 5



Rozwiąż test. W odpowiednie miejsca przeciągnij poprawne odpowiedzi.

Odległość punktu o współrzędnych  $(2, 3)$  od prostej o równaniu  $y = -1$  jest równa

Odległość punktu o współrzędnych  $(2, 3)$  od prostej o równaniu  $x = -1$  jest równa

Odległość punktu o współrzędnych  $(-3, -3)$  od prostej o równaniu  $y = x$  jest równa

Odległość punktu o współrzędnych  $(1, 2)$  od prostej o równaniu  $y = x$  jest równa

2 0 5 3 4 4  $\sqrt{3}$  0 3 6  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  1  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   $\sqrt{2}$

## Ćwiczenie 6



## Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Marzena Kwaśniewska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Pojęcie odległości punktu od prostej

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) oblicza odległość punktu od prostej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza odległość punktu od prostej na płaszczyźnie euklidesowej,
- wyznacza odległość punktu od prostej w prostokątnym układzie współrzędnych,
- stosuje poznane kryteria do rozwiązywania zadań dotyczących geometrii analitycznej.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

## Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

## Przebieg lekcji

### Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

### Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

### Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Zmieniaj wartości współczynników równania prostej  $k$  opisanej równaniem  $ax + by + c = 0$ . Zaobserwuj jak zmienia się położenie punktu  $A$  oraz jego odległość od prostej  $k$ . Mając podane równanie prostej oraz współrzędne punktu, podaj odległość między prostą a punktem.” oraz materiał z sekcji „Aplet”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Pojęcie odległości punktu od prostej”).

**Materiały pomocnicze:**

- [Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Pojęcie odległości punktu od prostej”.