



## Pojęcie nierówności kwadratowej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Aby opisać zjawiska generujące dzisiejszy świat, wygodnie jest dysponować narzędziami, które ułatwiają te opisy. Do nich niewątpliwie należą równania i nierówności. W tym materiale poznasz zasadnicze różnice między zbiorem rozwiązań równania kwadratowego i nierówności kwadratowej. Do rozwiązania nierówności kwadratowej wykorzystamy wykres funkcji kwadratowej.

### Twoje cele

- Wyznaczysz wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji są większe (mniejsze) od podanej liczby.
- Korzystając z wykresu funkcji kwadratowej, wyznaczysz zbiór rozwiązań nierówności.
- Odczytasz z wykresu, dla jakich argumentów funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie, ujemne.

# Przeczytaj

---

Dla rozwiązania **nierówności kwadratowej** cenną umiejętnością jest rozwiązywanie równań kwadratowych. Ponadto niezbędna jest również umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej oraz odczytywania własności tej funkcji z wykresu.

Odczytywanie z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne jest równoważne rozwiązaniu odpowiedniej nierówności.

Równanie kwadratowe może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie posiadać rozwiązania.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest najczęściej przedział liczbowy lub suma przedziałów. Zdarza się, że rozwiązaniem nierówności jest zbiór składający się z jednej liczby. Nierówność kwadratowa może również nie posiadać rzeczywistych rozwiązań.

## Definicja: Nierówność kwadratowa

Nierównością kwadratową z niewiadomą  $x$  nazywamy każdą nierówność postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0, \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0, \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0,$$

gdzie:

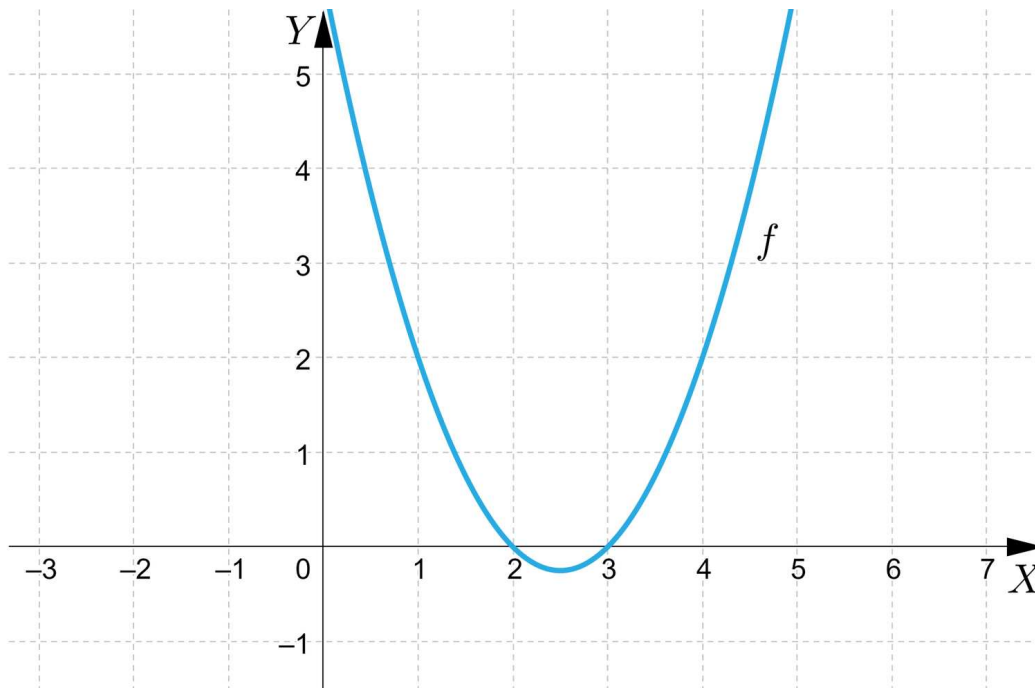
$a, b, c$  – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i  $a \neq 0$ .

Nierówności kwadratowe, w których wszystkie współczynniki liczbowe trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi zupełnymi**.

Nierówności, w których współczynnik  $b = 0$  lub współczynnik  $c = 0$  nazywamy **nierównościami kwadratowymi niezupełnymi**.

## Przykład 1

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  odczytamy, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich wartości funkcji są ujemne.



Miejsca zerowe funkcji  $f$  odczytujemy z wykresu funkcji- są to takie argumenty, dla których wartość funkcji jest równa zero.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ lub } x = 3$$

Pod osią  $X$  znajdują się takie punkty należące do wykresu funkcji  $f$ , których druga współrzędna jest ujemna. Zapisujemy odpowiednią nierówność.

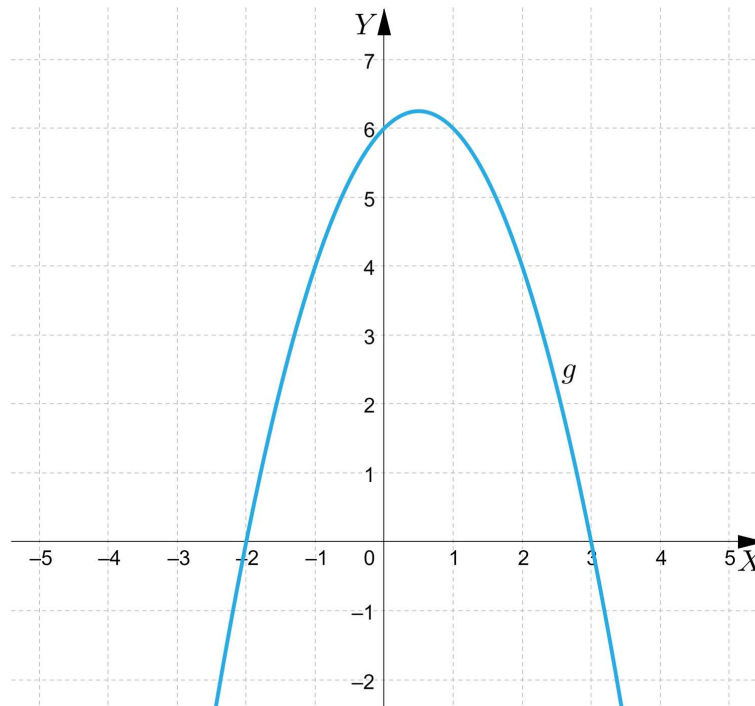
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3) \quad x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$$

Nad osią  $X$  znajdują się takie punkty należące do wykresu funkcji  $f$ , których druga współrzędna jest dodatnia.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \quad x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty).$$

### Przykład 2

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej  $g(x) = -(x - 3)(x + 2)$  odczytamy, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość zero, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich wartości funkcji są ujemne.



Odczytujemy z wykresu miejsca zerowe funkcji  $g$ , czyli pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osią  $X$ .

Są to liczby  $x = -2, x = 3$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ lub } x = 3$$

Funkcja  $g$  przyjmuje wartości dodatnie dla punktów znajdujących się na wykresie funkcji powyżej osi  $X$ .

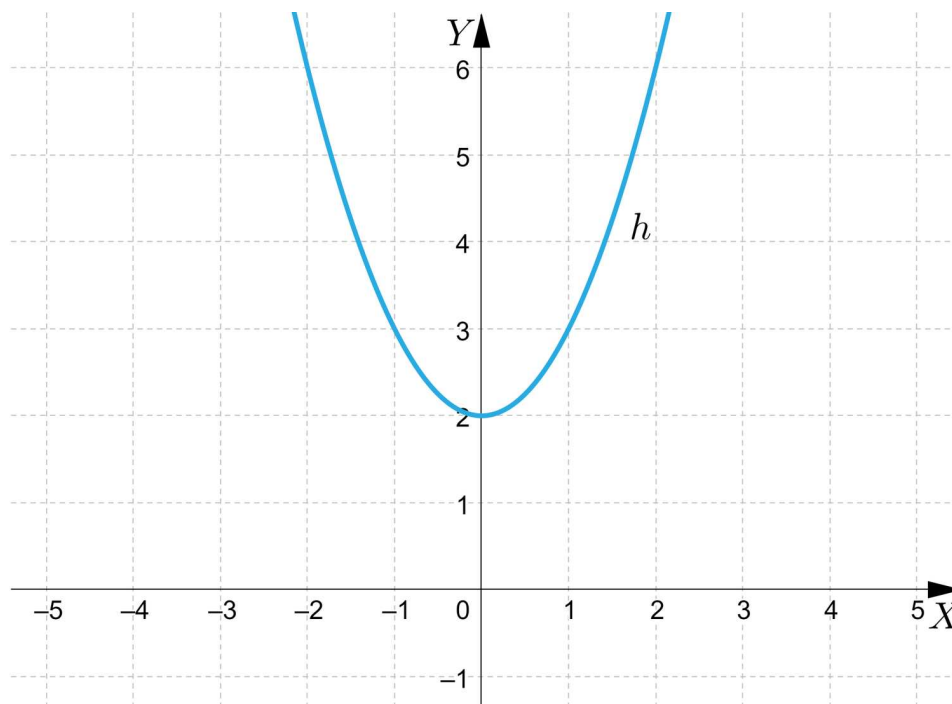
$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 3) \quad - (x - 3)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 3)$$

Funkcja  $g$  przyjmuje wartości ujemne dla takich  $x$ , dla których  $g(x) < 0$ .

$$g(x) = -(x - 3)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

### Przykład 3

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej  $h(x) = x^2 + 2$  odczytamy, dla jakich argumentów funkcja  $h$  przyjmuje wartość zero, dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich wartości funkcji są ujemne.



Wykres funkcji  $h$  nie przecina osi  $X$ , zatem funkcja nie posiada miejsc zerowych.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \qquad x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , ponieważ cały wykres funkcji znajduje się powyżej osi  $X$ .

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \qquad x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \qquad x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Odczytywanie, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne jest pomocne w rozwiązywaniu odpowiednich nierówności.

## Słownik

### nierówność kwadratowa z niewiadomą $x$

jest to każda nierówność postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

$a, b, c$  – są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i  $a \neq 0$

# Schemat interaktywny

## Polecenie 1

Poniżej zamieszczony jest schemat interaktywny przedstawiający klasyfikację nierówności kwadratowych na nierówności kwadratowe zupełne i niezupełne.

## Polecenie 2

Przeciągnij nierówności do odpowiedniego obszaru.

Nierówność kwadratowa niezupełna postaci  
 $ax^2 + bx > 0$  gdzie  $a, b \neq 0$ .

Nierówność kwadratowa niezupełna postaci  
 $ax^2 + c > 0$  gdzie  $a, c \neq 0$ .

Nierówność kwadratowa zupełna.

$-x(x - 1) > 2x^2$

$(5x - 1)(5x + 1) > 0$

$(x + 1)^2 > -8x$

$(x - 2)^2 > 4$

$2x > (x + 1)^2$

$-2x^2 + x - 6 > 2 \cdot (x + 1)$

$(x + 5)^2 > 4(x - 1)$

$3x^2 + 5x + 1 > 5 \cdot (x + 1)$

$3(x + 1) > 2(x + 1)^2 + 1$

## Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm przedstawiający klasyfikację nierówności kwadratowych na nierówności kwadratowe zupełne i niezupełne.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



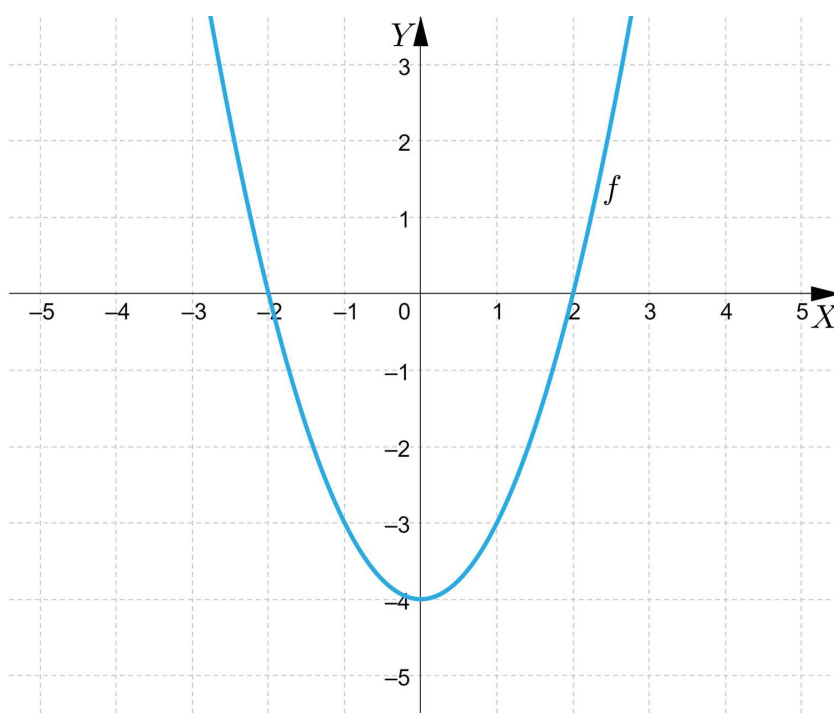
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Mając podany wykres funkcji kwadratowej  $f$  jak na poniższym rysunku, odczytaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



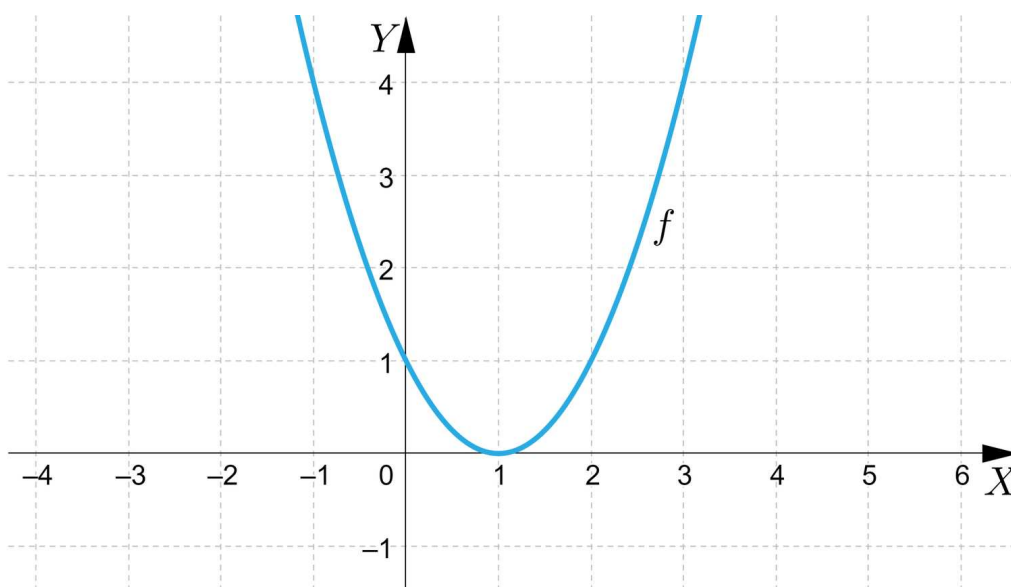
Ćwiczenie 4



### Ćwiczenie 5



Na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = (x - 1)^2$  określ odpowiedni zbiór rozwiązań dla każdej z danych nierówności.



### Ćwiczenie 6



### Ćwiczenie 7



### Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Pojęcie nierówności kwadratowej

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa rodzaj nierówności ze względu na liczbę niewiadomych i stopień niewiadomej
- rozpoznaje nierówność drugiego stopnia z jedną niewiadomą
- odróżnia nierówności kwadratowe zupełne i niezupełne
- odczytuje z wykresu, dla jakich argumentów funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie, ujemne
- tworzy procedury budowy nierówności kwadratowej

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych zależności dających się zapisać w postaci nierówności kwadratowej.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych nierówności kwadratowych. Następnie stara się podzielić nierówności na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje nierówności ze względu na liczbę niewiadomych i stopień nierówności, podział na nierówności zupełne i niezupełne.
3. Uczniowie oglądają schemat interaktywny i omawiają go wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie zapoznają się z treściami zamieszczonymi w sekcji Przeczytaj, a następnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju nierówności ze względu na liczbę niewiadomych, stopień nierówności, podział na nierówności zupełne i niezupełne.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

[Nierówność kwadratowa](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Schemat interaktywny może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli prezentującej rodzaje nierówności.