



Algorytmy numeryczne i przybliżone

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Algorytmy numeryczne i przybliżone

Źródło: Aswin Anand, domena publiczna.

Wiemy już, że miejscem zerowym nazywamy taki argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość 0. Na lekcjach matematyki nauczyliśmy się, jak wyznaczać miejsce zerowe funkcji liniowej (e-materiał [Miejsce zerowe funkcji liniowej](#)) czy kwadratowej (e-materiał [Miejsca zerowe funkcji kwadratowej](#)).

W przypadku tych funkcji rozwiązywanie zadań jest proste. Co jednak robić, gdy mamy do czynienia z funkcją opisaną z użyciem wielomianu stopnia wyższego niż drugi lub za pomocą innej funkcji?

Jeśli nie jesteśmy w stanie dokładnie (analitycznie) wyznaczyć pierwiastka funkcji, znajdziemy jego przybliżenie. Jednym z wykorzystywanych do tego algorytmów jest algorytm bisekcji, nazywany także metodą równego podziału (albo połowienia przedziału). Matematyczny opis tego rozwiązania znajduje się w e-materiale [Jak wyznaczyć przybliżoną wartość miejsca zerowego funkcji?](#)

Implementacje w poszczególnych językach programowania zostały omówione w e-materiałach:

- [Algorytmy numeryczne i przybliżone w języku C++](#),
- [Algorytmy numeryczne i przybliżone w języku w języku Java](#),
- [Algorytmy numeryczne i przybliżone w języku w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Algorytmy numeryczne i przybliżone – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Przeanalizujesz algorytm znajdowania miejsca zerowego funkcji metodą połowienia przedziałów.
- Wyjaśnisz, w jakich przypadkach można użyć metody połowienia przedziałów w celu wyznaczenia miejsca zerowego funkcji.
- Zastosujesz metodę bisekcji dla przykładowej funkcji.
- Przeanalizujesz algorytm bisekcji zapisany za pomocą pseudokodu.

Przeczytaj

Metoda bisekcji

Metoda bisekcji jest sposobem na wyznaczanie miejsca zerowego funkcji. Aby można było jej użyć do wskazania miejsca zerowego funkcji w przedziale $\langle a; b \rangle$, muszą zostać spełnione następujące warunki:

1. funkcja w zadanym przedziale $\langle a; b \rangle$ jest **ciągła**,
2. wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a; b \rangle$ mają różne znaki.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- $f(x)$ – funkcja ciągła w zadanym przedziale
- a, b – liczby rzeczywiste, końce przedziału poszukiwań pierwiastka
- δ – liczba rzeczywista, przybliżenie określające maksymalną długość przedziału
- ϵ – liczba rzeczywista, przybliżenie wartości funkcji w punkcie x_0

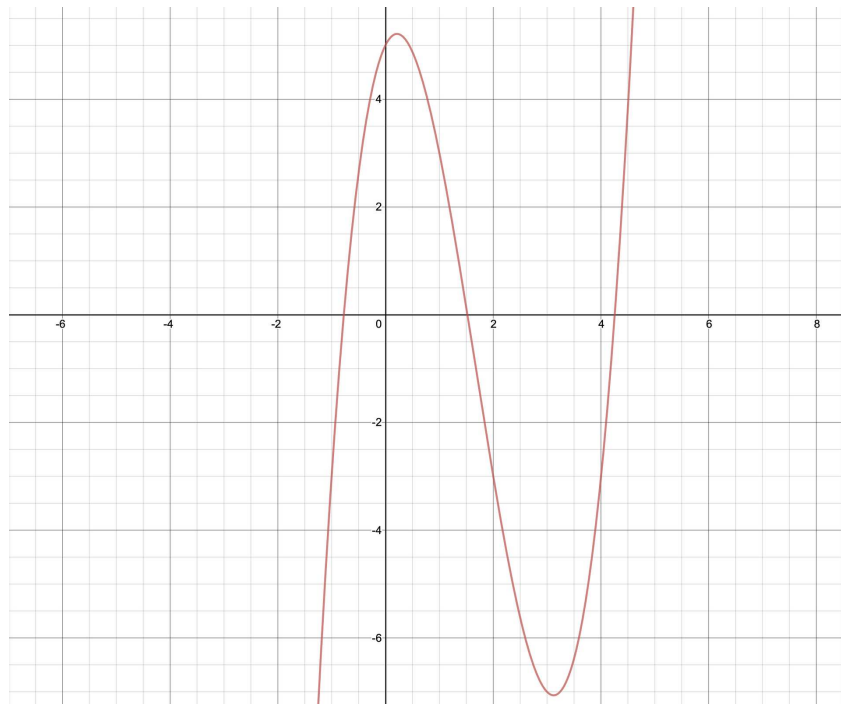
Wynik:

- x_0 – liczba rzeczywista, przybliżenie miejsca zerowego

Algorytm znajdowania miejsca zerowego metodą połowienia przedziału możemy zapisać za pomocą listy kroków:

1. Wyznacz x_0 jako środek przedziału $\langle a; b \rangle$.
2. Sprawdź, czy dla argumentu x_0 wartość funkcji $f(x_0)$ zbliży się do zera z przybliżeniem ϵ lub długość przedziału $\langle a; b \rangle$ będzie mniejsza od dokładności δ . Jeżeli tak, udało się znaleźć przybliżenie pierwiastka funkcji x_0 . Zakończ algorytm.
3. W przeciwnym wypadku wybierz jedną z połówek przedziału. Lewy lub prawy koniec przedziału przyjmie wartość x_0 :
 1. Jeżeli $f(x_0) \cdot f(a) < 0$, to $b = x_0$
 2. Jeżeli $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, to $a = x_0$
4. Przejdź do punktu 1.

Przeanalizujemy wykres funkcji:



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jest to wykres funkcji opisanej wzorem:

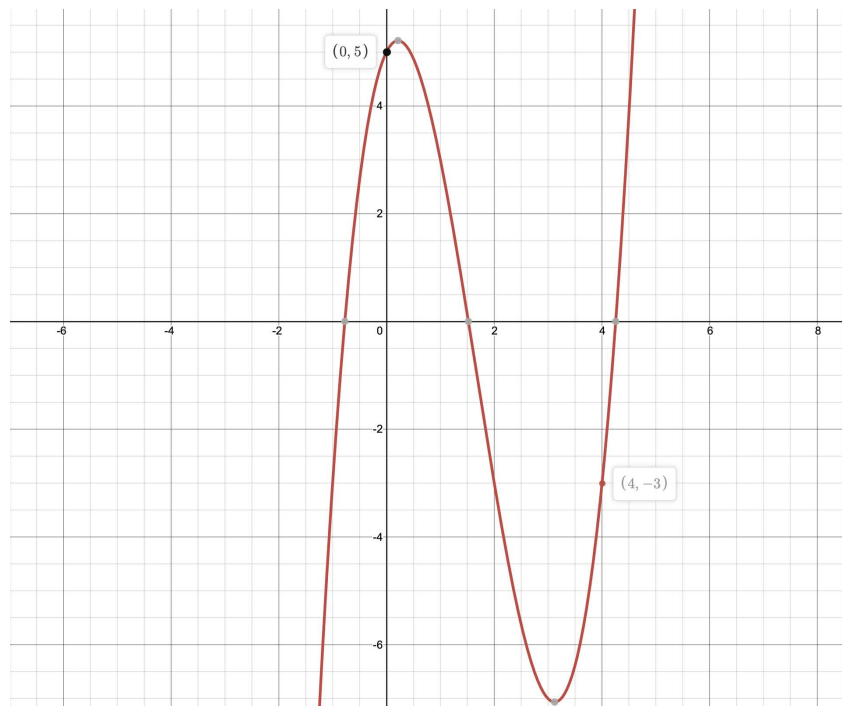
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenia pierwiastka funkcji w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$.

Nie jesteśmy w stanie wskazać miejsca zerowego funkcji, posługując się metodami poznanymi na lekcjach matematyki. Możemy jednak określić jego przybliżoną wartość, korzystając z metody bisekcji. Musimy jednak sprawdzić, czy spełnione są dwa warunki niezbędne, aby zastosować tę metodę.

Założenia metody połowienia podziału

Przyjrzyjmy się jeszcze raz wykresowi funkcji. Sprawdźmy, jakie wartości przyjmuje ona na końcach przedziału, w którym chcemy szukać pierwiastka.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Oto wartości funkcji dla argumentów wyznaczających końce przedziału ($x = 0$ oraz dla $x = 4$):

$$f(0) = 5$$

$$f(4) = -3$$

Funkcja na końcach przedziału przyjmuje wartości różniące się znakami. Dla argumentu $x = 0$ wartość funkcji jest dodatnia, natomiast dla $x = 4$ ujemna. Wiedząc też, że funkcja jest ciągła w zadanym przedziale, możemy skorzystać z twierdzenia Darboux.

Mówi ono, że jeśli funkcja jest ciągła w zadanym przedziale i wartości funkcji dla końców przedziałów są różnych znaków, to istnieje punkt pośredni $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Algorytm bisekcji – pseudokod

Przeanalizujemy zapisany za pomocą pseudokodu algorytm bisekcji dla funkcji f w przedziale $\langle a; b \rangle$. Dokładność wyznaczenia pierwiastka opisują parametry `delta` oraz `epsilon` – określają one, z jakim przybliżeniem wyznaczymy miejsce zerowe. Parametr `epsilon` jest przybliżeniem wartości funkcji w punkcie x_0 – nie będziemy szukać punktu, w którym wartość funkcji wynosi zero, lecz takiego, dla którego różni się ona od zera o wartości z zakresu $\langle -\epsilon, \epsilon \rangle$. Przybliżenie `delta` określa minimalną długość przedziału, przy której możemy kontynuować dzielenie go na połowy.

Zwróconą wartością jest obliczone przybliżenie miejsca zerowego x_0 .


```

1 długośćPrzedziału = b - a
2 dopóki prawda wykonuj:
3     długośćPrzedziału = długośćPrzedziału / 2
4     x0 = a + długośćPrzedziału
5
6     jeżeli wartośćBezwzględna(długośćPrzedziału) < delta LUB wart
7         zwróć x0 i zakończ algorytm
8
9     jeżeli f(x0) * f(a) < 0 wykonaj:
10         b = x0
11     w przeciwnym razie wykonaj:
12         a = x0

```

W pierwszej linii zapisane zostało polecenie obliczenia długości przedziału, w którym jest poszukiwane miejsce zerowe funkcji.

Następnie wewnątrz pętli przedział jest dzielony na dwie równe części; x_0 oznacza punkt środkowy przedziału $\langle a; b \rangle$.

Jeżeli przedział będzie krótszy od wartości δ lub wartość bezwzględna z wartości funkcji w punkcie x_0 będzie mniejsza od ϵ , przerywamy pętlę i zwracamy wartość punktu środkowego x_0 .

W przypadku, gdy punkt środkowy nie spełni żadnego z warunków, nie będzie on przybliżeniem miejsca zerowego, lecz stanie się nowym prawym lub lewym końcem przedziału. Wartości funkcji na końcach przedziału muszą mieć zawsze różne znaki. Jeżeli zatem iloczyn wartości funkcji w punkcie środkowym i na lewym końcu przedziału ma wartość ujemną, punkt środkowy staje się nowym prawym końcem przedziału. W przeciwnym wypadku będzie on końcem lewym.

Wyznaczenie pierwiastka funkcji trzeciego stopnia

Znajdźmy miejsce zerowe funkcji opisanej wzorem:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$$

w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$. Wartości ϵ i δ niech wynoszą 0,15.

Sprawdźmy, czy funkcja spełnia założenia.

1. Własnością funkcji wielomianowej jest ciągłość. Rozpatrywana funkcja jest opisana za pomocą wielomianu, a zatem zachowuje ciągłość dla dowolnych liczb rzeczywistych –

także w przedziale $<0; 2>$.

2. Wartości funkcji na końcach przedziału $<0; 2>$ mają różne znaki, ponieważ:

$$f(0) = 5$$

$$f(2) = -3$$

Funkcja spełnia wymagane założenia, a zatem możemy przejść do realizowania algorytmu bisekcji.

Przedział ma długość 2; dzielimy go na pół, a więc punkt środkowy to $x_0 = 1$.

Sprawdzamy, czy:

- wartość bezwzględna z długości przedziału jest mniejsza od 0,15 lub
- wartość funkcji w punkcie środkowym jest mniejsza od 0,15.

Wartość funkcji w punkcie x_0 to:

$$f(1) = 3$$

Żaden z warunków nie jest spełniony, więc punkt środkowy staje się lewym lub prawym końcem przedziału. Sprawdzamy, czy iloczyn wartości funkcji w punkcie środkowym i lewym końcu przedziału daje wartość ujemną:

$$f(1) \cdot f(0) = 3 \cdot 5 = 15 > 0$$

Iloczyn nie daje wartości ujemnej, więc punkt środkowy staje się lewym końcem przedziału.

Teraz poszukujemy miejsca zerowego w przedziale $<1; 2>$. Ponownie dzielimy długość przedziału na dwie równe części; środek przedziału to $x_0 = 1,5$.

Sprawdzamy warunki, czy:

- wartość bezwzględna z długości przedziału jest mniejsza od 0,15 lub
- wartość funkcji w punkcie środkowym jest mniejsza od 0,15.

Pierwszy warunek nie jest spełniony, ponieważ długość przedziału wynosi 0,5. Natomiast wartość funkcji w punkcie środkowym to:

$$f(1,5) = 0,125$$

Wartość bezwzględna z wartości funkcji w punkcie środkowym jest mniejsza od 0, 15, więc zwrócona zostaje wartość x_0 równa 1, 5. Przybliżeniem miejsca zerowego funkcji

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$$

w przedziale $<0; 2>$ jest 1, 5.

Słownik

ciągłość funkcji w przedziale

funkcję $f : <a; b> \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą, gdy dla każdego $x \in <a; b>$ istnieje granica (dla $x = a$ prawostronna, zaś dla $x = b$ lewostronna) funkcji f w punkcie x oraz granica ta wynosi $f(x)$

metoda bisekcji

(metoda połowienia przedziału, metoda równego podziału) jedna z metod rozwiązywania równań nieliniowych, jeśli funkcja spełnia następujące warunki:

1. funkcja w zadanym przedziale $<a; b>$ jest ciągła
2. wartości funkcji na końcach przedziału $<a; b>$ mają różne znaki

pierwiastek funkcji

(miejsce zerowe) argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet prezentujący kolejne kroki znajdowania pierwiastka funkcji wielomianowej. Przetestuj działanie algorytmu przy różnych danych wejściowych oraz dokładności wyznaczonego przybliżenia.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę ze swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi apletu

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij tekst właściwymi fragmentami.

Metoda bisekcji, zwana inaczej , jest przybliżoną metodą wyznaczania funkcji. Polega ona na przedziału na równe części, aż do momentu znalezienia pierwiastka funkcji.

przybliżenia

zerowego

zbioru wartości

dzieleniu

dwie

połowienia

trzy

podwojenia

przedziału

miejsca

metodą

Ćwiczenie 2



Wskaż warunki, które muszą być spełnione, aby można było użyć metody połowienia przedziału.

☐ Funkcja musi być ciągła w całej dziedzinie.

☐ Wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a; b \rangle$ muszą mieć takie same znaki.

☐ Wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a; b \rangle$ muszą mieć różne znaki.

☐ Funkcja w zadanym przedziale $\langle a; b \rangle$ musi być ciągła.

Ćwiczenie 3



Wskaż, czy możemy użyć algorytmu bisekcji do wskazania miejsca zerowego pewnej funkcji w przedziale $< 2, 7 >$.

- ☐ Nie, ponieważ funkcja w zadanym przedziale jest ciągła.
- ☐ Tak, ponieważ funkcja na końcach przedziału przyjmuje wartości o takich samych znakach.
- ☐ Nie, ponieważ funkcja na końcach przedziału przyjmuje wartości o takich samych znakach.
- ☐ Tak, ponieważ funkcja w zadanym przedziale nie jest ciągła.

Ćwiczenie 4



Wskaż, jaki przedział będzie rozpatrywany po pierwszym cyklu pętli w algorytmie bisekcji, wiedząc, że chcemy wyznaczyć miejsce zerowe funkcji w przedziale $< -1; 1 >$.

- ☐ $< -1; 0 >$
- ☐ $< 0, 5; 1 >$
- ☐ $< 0; 1 >$
- ☐ $< -2; 1 >$
- ☐ $< -0, 5; 1 >$
- ☐ $< 1; 2 >$

Ćwiczenie 5



Dopasuj pojęcia związane z algorytmem bisekcji do właściwych opisów.

epsilon

Wartość, która w przypadku spełnienia pewnych warunków, staje się przybliżeniem miejsca zerowego funkcji.

delta

Jeżeli wartość bezwzględna z wartości funkcji w punkcie środkowym jest mniejsza od tej wartości, zostanie zwrócony punkt środkowy.

pierwiastek funkcji

Inaczej nazywany jest miejscem zerowym.

punkt środkowy

Jeżeli wartość bezwzględna z długości przedziału jest mniejsza od tej wartości, zostanie zwrócony punkt środkowy.

Ćwiczenie 6



Uporządkuj elementy pseudokodu algorytmu bisekcji.

$a = x_0$



lub wartośćBezwzględna($f(x_0)$) < epsilon



długośćPrzedziału = długośćPrzedziału / 2



zwróć x_0 i zakończ algorytm



$x_0 = a + \text{długośćPrzedziału}$



w przeciwnym wypadku



długośćPrzedziału = $b - a$



jeżeli długośćPrzedziału < delta



$b = x_0$



jeżeli $f(x_0) * f(a) < 0$



dopóki prawda wykonuj



Ćwiczenie 7



Zaznacz przybliżoną wartość miejsca zerowego funkcji $2x^5 - 6x^3 - 2$ w przedziale $<-1; 0>$, jeżeli wartość epsilon wynosi 0,06, a wartość delta 0,01.

☐ -0,625

☐ -0,742

☐ -0,75

☐ -0,5

Ćwiczenie 8



Wskaż, ile razy zostanie obliczona wartość środkowa x_0 w algorytmie bisekcji dla funkcji $x^3 - 6x - 2$ w przedziale $<0; 3>$, jeżeli wartość epsilon wynosi 0,4 i wartość delta jest równa 0,4.

☐ 3

☐ 5

☐ 2

☐ 4

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Algorytmy numeryczne i przybliżone

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

6) objaśnia sposoby wykonywania przez komputer działań arytmetycznych i operacji logicznych;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zapisuje za pomocą listy kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

f) wyznaczania miejsc zerowych funkcji metodą połowienia,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz algorytm znajdowania miejsca zerowego funkcji metodą połowienia przedziałów.
- Wyjaśnisz, w jakich przypadkach można użyć metody połowienia przedziałów w celu wyznaczenia miejsca zerowego funkcji.
- Zastosujesz metodę bisekcji dla przykładowej funkcji.
- Przeanalizujesz algorytm bisekcji zapisany za pomocą pseudokodu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Algorytmy numeryczne i przybliżone”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom temat zajęć oraz cele. Prosi, by na ich podstawie uczniowie sformułowali kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie przystępują do cichego czytania tekstu zawartego w sekcji „Przeczytaj”, jeśli nauczyciel – na podstawie raportu na platformie – uważa, że przygotowanie uczniów jest wystarczające, może pominąć tę czynność.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z kolejnymi krokami znajdowania pierwiastka funkcji wielomianowej. Następnie testują działanie algorytmu przy różnych danych wejściowych oraz dokładności wyznaczanego przybliżenia. W kolejnym kroku wykonują polecenie 2.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Liga zadaniowa – uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia nr 1–5 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania problemów postawionych w zadaniach.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel raz jeszcze wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W odniesieniu do ich realizacji dokonuje szczegółowej oceny rozwiązania zastosowanego przez wybranego ucznia. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
 - na czym polega wyznaczanie miejsca zerowego funkcji z wykorzystaniem metody bisekcji ?
 - jak nazywamy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero?

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się”.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.