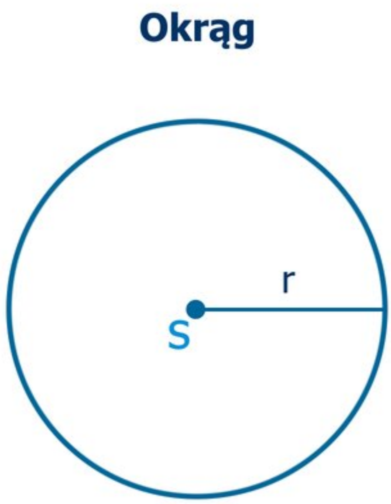
Długość okręgu

Rektyfikacja okręgu. Obliczanie długości okręgu - przykłady, obliczania. Liczba Pi i jej przybliżenia. Ciekawostki o liczbie Pi. Ilustracja interaktywna opisująca okrąg. Prezentacja multimedialna rektyfikacji okręgu. Ilustracja interaktywna o długości okręgu i obwodzie koła.
Zmiany długości okręgu w zależności od długości promienia. Ilustracja interaktywna: Stosunek długości okręgu do jego średnicy. Animacja: Zależność długości okręgu od jego promienia.

Długość okręgu

Okrąg

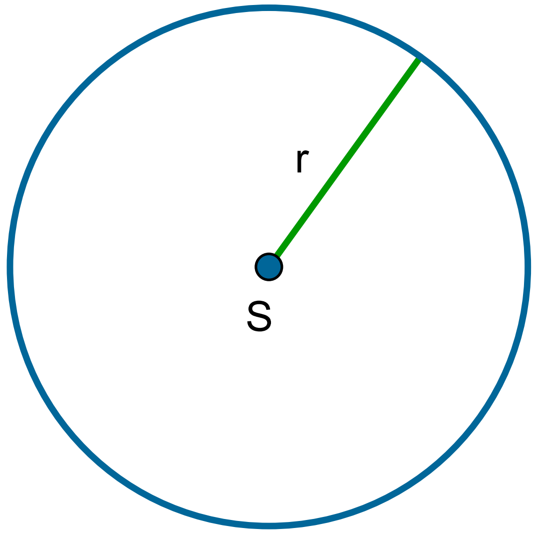


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Zapamiętaj!

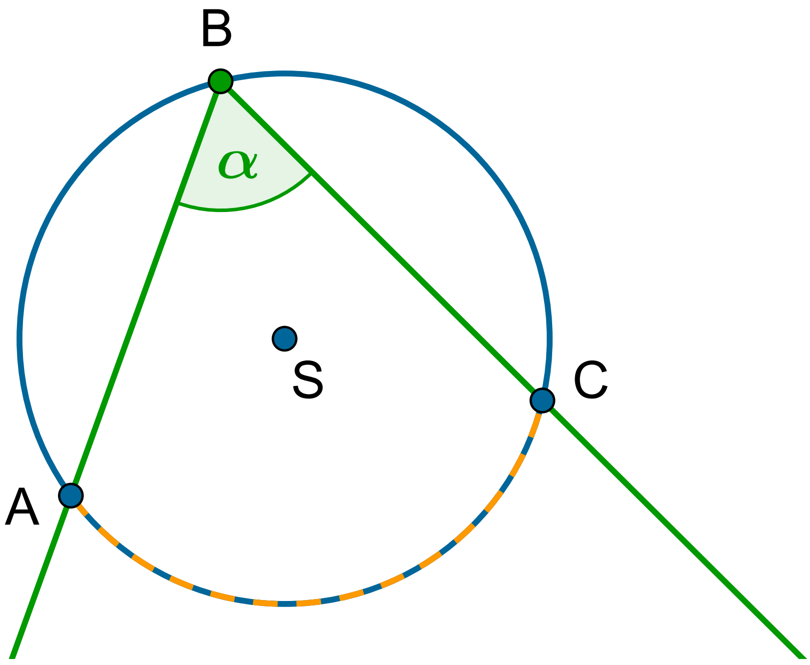
Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.
Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r oznaczamy $O(S, r)$.

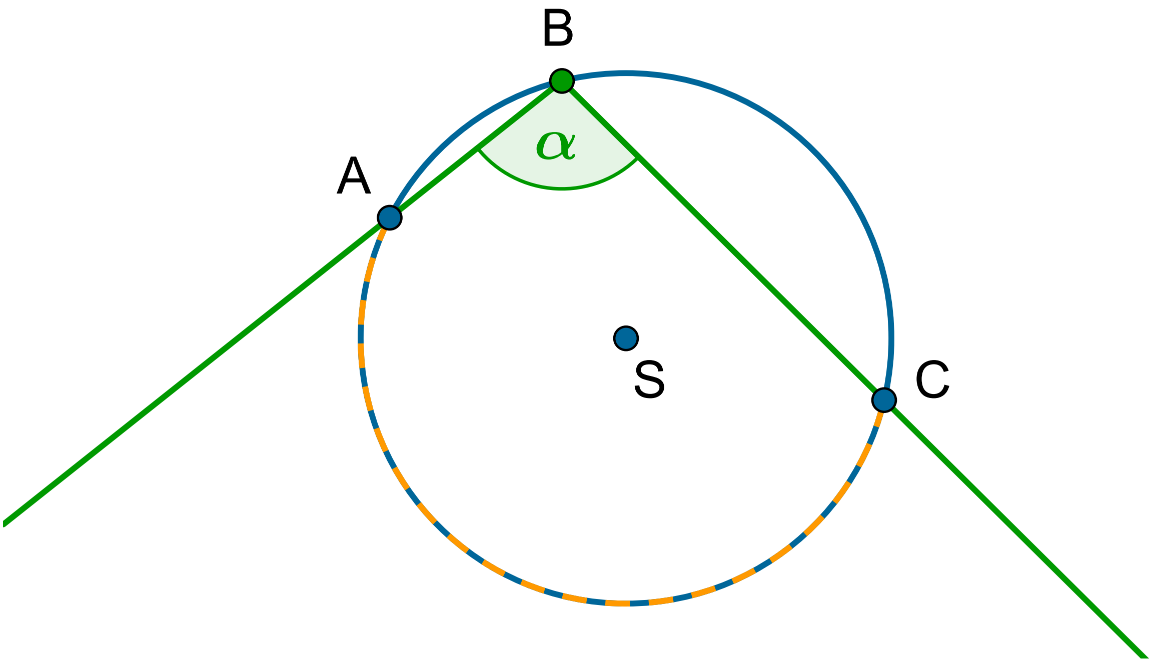


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąt wpisany w okrąg

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a jego ramionami są półproste zawierające dwie cięciwy tego okręgu.

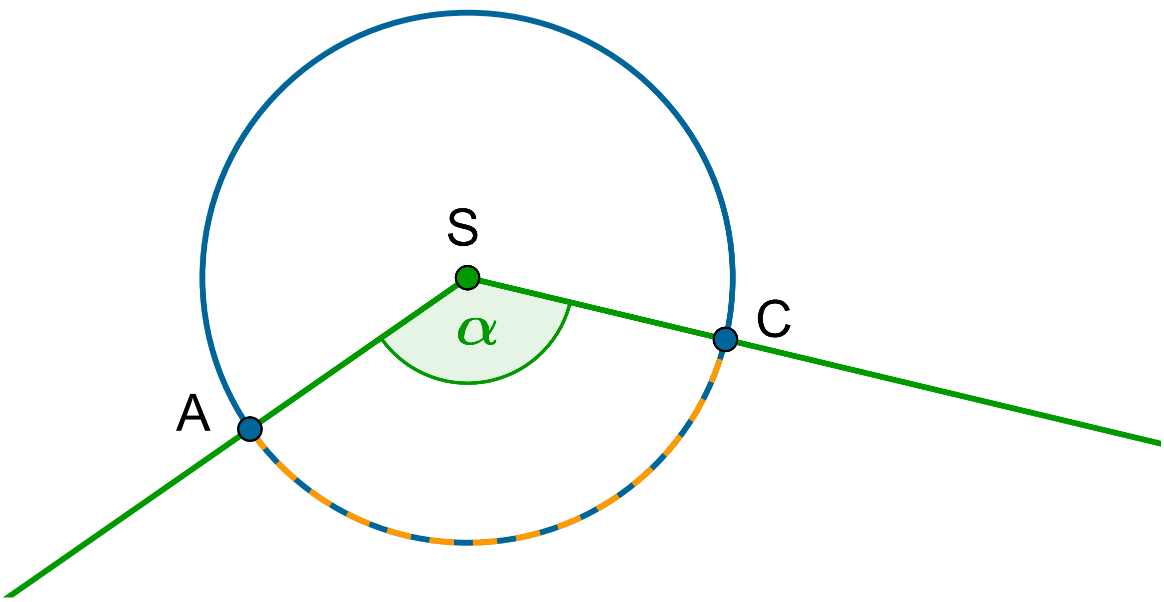


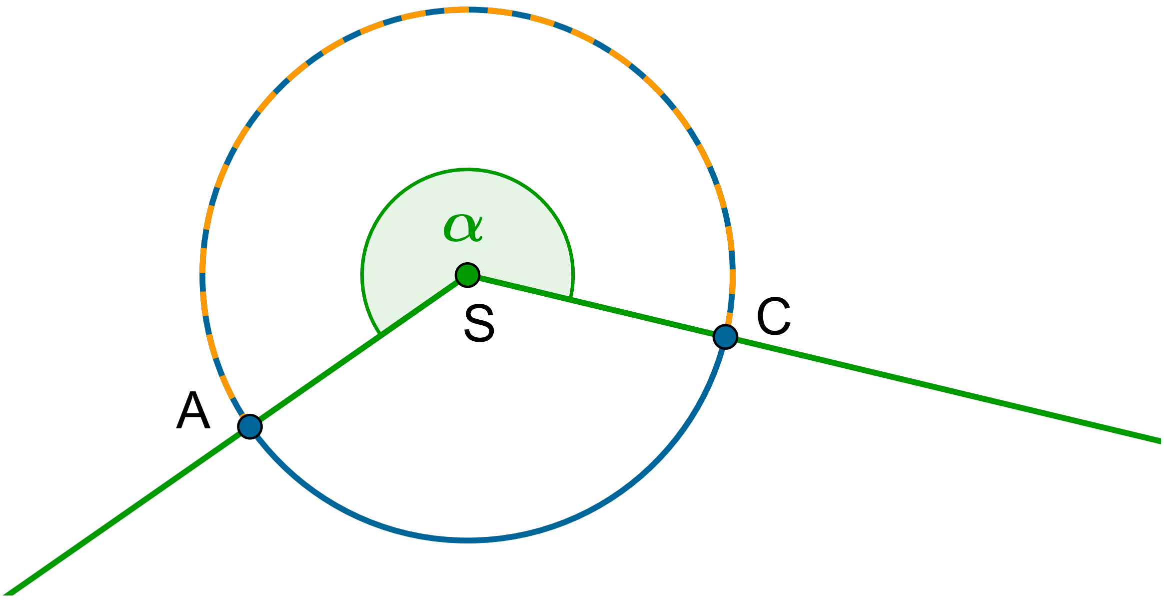


Punkty A i C wyznaczają dwa łuki na okręgu. Mówimy, że kąt wpisany α jest oparty na łuku AC, mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku, na którym nie leży wierzchołek B (łuk zawarty w kącie ABC). Czasem mówimy też, że kąt α jest oparty na cięciwie AC.

Definicja: Kąt środkowy okręgu

Kątem środkowym okręgu nazywamy kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.





Mówimy, że kąt środkowy α jest oparty na łuku AC, mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku.

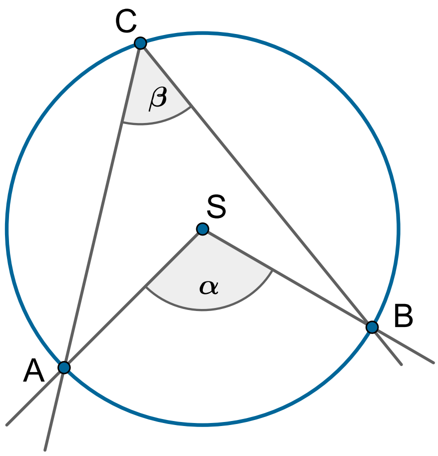
- W przypadku kątów mniejszych niż 180° kąt środkowy jest oparty na krótszym z łuków AC.
- W przypadku kątów większych niż 180° kąt środkowy oparty jest na dłuższym z łuków AC.
- W przypadku kąta równego 180° kąt środkowy oparty jest na półokręgu.

Rozpatrzymy teraz sytuację, w której kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku okręgu.

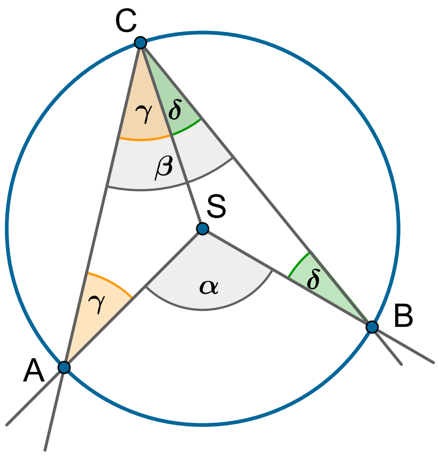
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/Pe64sPZku

- I przypadek

Środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



Na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r zaznaczmy punkty A, B i C. Niech α będzie kątem środkowym opartym na łuku AB, a β niech będzie kątem wpisanym opartym na tym samym łuku AB.
Oznaczmy $\gamma = |\sphericalangle \mathrm{CAS}|$ oraz $\delta = |\sphericalangle \mathrm{SBC}|$. Poprowadźmy z punktu C promień okręgu. Utworzone w ten sposób trójkąty ACS oraz BCS są równoramienne. Zatem w każdym z tych trójkątów miary kątów przy podstawie są równe.



Zatem $|\sphericalangle \mathrm{ACS}| = |\sphericalangle \mathrm{CAS}| = \gamma$ i $|\sphericalangle \mathrm{BCS}| = |\sphericalangle \mathrm{CBS}| = \delta$.
Wtedy

$$|\sphericalangle \mathrm{ASC}| = 180^\circ - 2\gamma, \; |\sphericalangle \mathrm{BSC}| = 180^\circ - 2\delta.$$

Suma miar kątów ASC, BSC, ASB jest równa 360°

$$|\sphericalangle \mathrm{ASC}| + |\sphericalangle \mathrm{BSC}| + |\sphericalangle \mathrm{ASB}| = 360^\circ$$

Czyli

$$180^\circ - 2\gamma + 180^\circ - 2\delta + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta = 2(\gamma + \delta),$$

ale

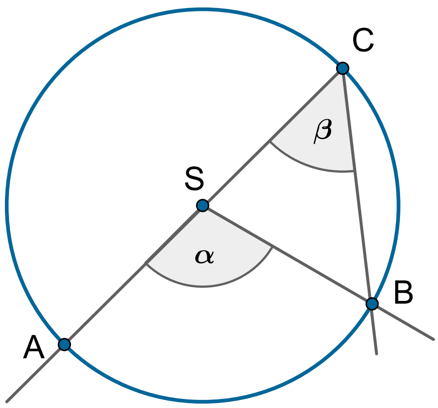
$$\gamma + \delta = \beta,$$

więc

$$\alpha = 2\beta.$$

- II przypadek

Środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



Trójkąt BCS jest równoramienny, stąd $|\sphericalangle \mathrm{SBC}| = \beta$. Zatem

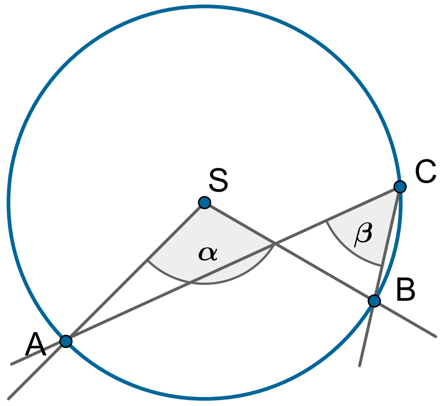
$$|\sphericalangle \mathrm{BSC}| = 180^\circ - 2\beta.$$

Z drugiej strony $|\sphericalangle \mathrm{BSC}| + \alpha = 180^\circ$.
Zatem $180^\circ - 2\beta + \alpha = 180^\circ$, więc w tym przypadku także

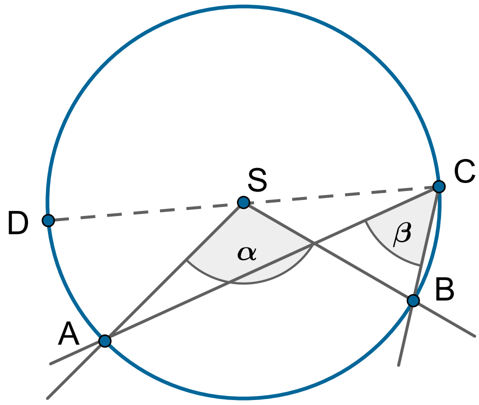
$$\alpha = 2\beta.$$

- III przypadek

Środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego.

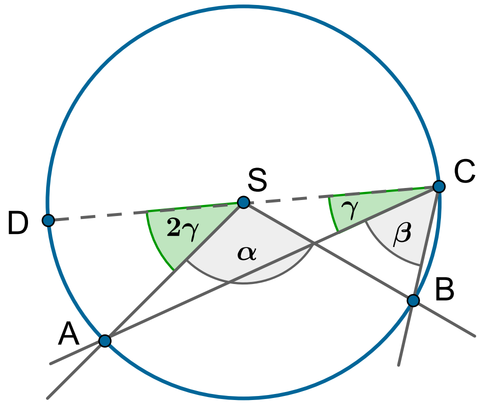


Narysujmy średnicę okręgu przechodzącą przez punkt C.



Oznaczmy przez γ kąt pomiędzy narysowaną średnicą a ramieniem AC kąta wpisanego, jak na rysunku.
Zauważmy, że kąt ASD jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt γ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$|\sphericalangle \mathrm{ASD}| = 2\gamma.$$



Kąt $\gamma + \beta$ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy $2\gamma + \alpha$ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$2(\gamma + \beta) = 2\gamma + \alpha.$$

Stąd ponownie otrzymujemy

$$\alpha = 2\beta.$$

Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym.

> **Twierdzenie: o kącie środkowym i wpisanym**
>
> Kąt środkowy ma miarę dwa razy większą niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Rektyfikacja okręgu

> **Ważne!**
>
> Rektyfikacja lub wyprostowanie okręgu polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa obwodowi danego okręgu.
> Jedną z przybliżonych konstrukcji wyprostowania okręgu podał w 1685 r. Adam Kochański, nadworny matematyk króla Jana III Sobieskiego.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/Pe64sPZku

Fragment dzieła Kochańskiego “Acta Eruditorium”

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/Pe64sPZku

Długość okręgu

Przez wiele stuleci uczeni poszukiwali wzoru, pozwalającego określić długość okręgu, którego promień jest znany. Dokonując przybliżonych pomiarów, zauważyli, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest w każdym przypadku w przybliżeniu równy 3.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/Pe64sPZku

Przeprowadzony eksperyment pozwolił na znalezienie dokładniejszej liczby określającej stosunek długości okręgu do jego średnicy.
Liczbę tę w XVIII w. oznaczono grecką literą π (pi) od pierwszej litery greckiego słowa perimetron, czyli obwód.

$$\pi = \frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}}$$

Oznaczmy
L – długość okręgu
r – promień okręgu
Wtedy średnica okręgu jest równa $2r$ oraz

$$\pi = \frac{L}{2r}$$

$$2\pi r = L$$

Długość Lokręgu o promieniu $r$wyraża się wzorem $L = 2\pi r$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/Pe64sPZku

Liczba π

Ciekawostka

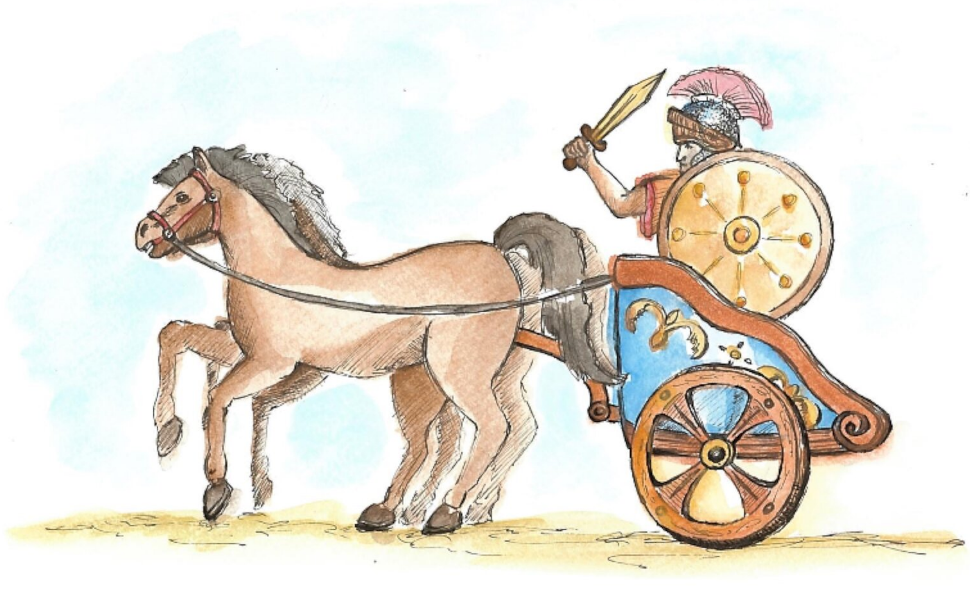
Starożytni Egipcjanie przyjmowali, że stosunek obwodu koła do jego średnicy jest równy

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3{,}1604\ldots$$

Średniowieczni Chińczycy uważali, że jest on równy $\frac{22}{7} \approx 3{,}1428\ldots$
Przez wieki podawano coraz lepsze przybliżenie liczby π.
W XVI w. matematyk holenderski Ludolph van Ceulen podał jej wartość z dokładnością do 35 miejsc po przecinku:
$3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$
Na cześć tego matematyka liczba pi zwana jest też ludolfiną.
W XVIII w. udowodniono, że liczba π nie jest liczbą wymierną. Nie da się więc jej zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego ani w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego okresowego.
Obecnie znamy przybliżenie liczby π z dokładnością do kilku bilionów miejsc po przecinku.

Przykład 1

W I w. p.n.e. rzymski architekt Witruwiusz zaproponował sposób pomiaru odległości drogowych, wykorzystujący poruszający się rydwan. Koło takiego rydwanu miało promień $0{,}6$ m. Na pokonanie jednej mili rzymskiej $(1400\ \mathrm{m})$ musiało wykonać 400 obrotów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz wartość liczby π, przyjmowaną przez Witruwiusza.
Odpowiedź.

$$400 \cdot 2\pi\mathrm{r} = 1400$$

$$400 \cdot 2\pi \cdot 0{,}6 = 1400$$

$$\pi = \frac{1400}{480} \approx 2{,}92$$

Obliczanie długości okręgu

Ważne!

W obliczeniach praktycznych najczęściej przyjmuje się, że $\pi \approx 3{,}14$.

Przykład 2

Średnica kółka do deskorolki jest równa 50 mm. Obliczymy, ile razy obróci się to kółko na drodze długości 1 m.
Obliczamy długość drogi, jaką pokona kółko podczas jednego obrotu, czyli obwód kółka.

$$L = 2r \cdot \pi$$

$$L \approx 50 \cdot 3{,}14$$

$$L \approx 157 \text{ mm}$$

Zamieniamy metr na milimetry.

$$1 \text{ m} \ = \ 1000 \text{ mm}$$

Obliczamy, ile razy obróci się kółko.

$$1000 : 157 = \ 6{,}369\ldots$$

Kółko obróci się około 6 razy.

Przykład 3

Koniec dużej wskazówki zegara w ciągu godziny pokonał drogę długości 94,2 cm.
Obliczymy przybliżoną długość tej wskazówki.
Oznaczmy przez x długość (w cm) dłuższej wskazówki zegara i skorzystajmy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi x$$

$$x = \frac{L}{2\pi}$$

$$x \approx \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14}$$

$$x \approx 15 \text{ cm}$$

Wskazówka ma około 15 cm długości.
Wynik obliczeń związanych z długością okręgu często musi być dokładny.

Przykład 4

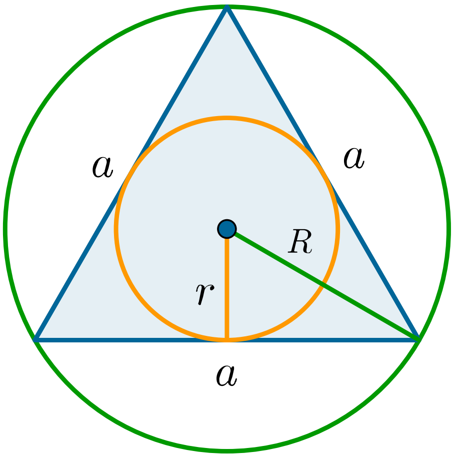
Obliczymy długość okręgu o promieniu 9 cm.
Korzystamy ze wzoru na długość okręgu, tym razem nie zastępując liczby π jej wartością przybliżoną.

$$L = 2\pi r$$

$$L = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$$

$$L = 18\pi \text{ cm}$$

Długość okręgu jest równa 18π cm.
Wiemy już, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg i na każdym trójkącie można opisać okrąg.
Jeśli trójkąt jest równoboczny, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta. Natomiast promień okręgu opisanego jest równy $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta.

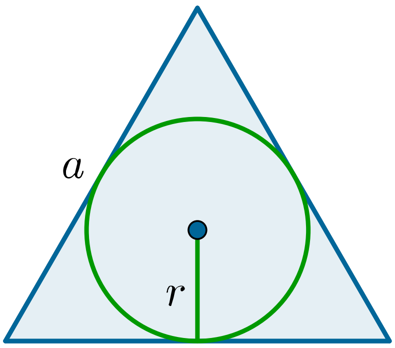


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Przykład 5

Długość okręgu jest równa $4\pi\sqrt{3}$. Na okręgu tym opisano trójkąt równoboczny. Oblicz obwód tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy
r - promień okręgu
a - długość boku trójkąta
h - wysokość trójkąta
Obliczamy promień okręgu, korzystając z tego, że długość okręgu jest równa $4\pi\sqrt{3}$.

$$2\pi r = 4\pi\sqrt{3}$$

$$r = 2\sqrt{3}$$

Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego, można zapisać $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Natomiast promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}h$. Zatem

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Porównujemy uzyskane liczby i wyznaczamy długość boku trójkąta.

$$\frac{a\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$$

$$a = 12$$

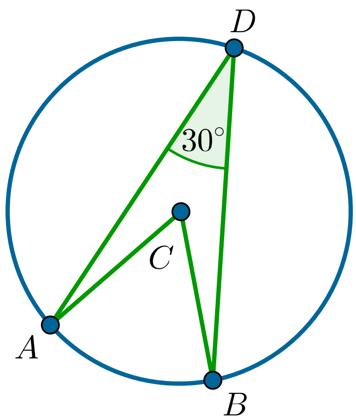
W trójkącie równobocznym wszystkie boki są równe. Możemy już obliczyć obwód trójkąta.

$$L = 3a = 3 \cdot 12 = 36$$

Obwód trójkąta jest równy 36.

Przykład 6

Punkty $A, \ \mathrm{B}, \ \mathrm{D}$ leżą na okręgu o środku w punkcie C. Kąt wpisany w okrąg, oparty na cięciwie AB, tak jak na rysunku, ma miarę 30°. Obwód trójkąta ABC jest równy 6. Wykaż, że długość tego okręgu jest większa od 12,5.



Kąt ACB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt ADB. Zatem jego miara jest dwa razy większa od miary kąta ADB.

$$|\sphericalangle \mathrm{ACB}| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Trójkąt ACB jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt między ramionami ma miarę 60°. Zatem każdy z pozostałych kątów też jest równy 60°. Trójkąt jest więc równoboczny i długość jego boku jest równa promieniowi okręgu.
Zatem promień okręgu jest równy $6 : 3 = 2$, a długość okręgu wynosi

$$2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi > 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$$

Ponieważ $12{,}56 > 12{,}5$, zatem długość okręgu jest większa od $12{,}5$, co należało wykazać.

Ćwiczenie 1

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Promień okręgu	Średnica okręgu	Obwód okręgu
8		
	20	
		24π
11		

Ćwiczenie 2

Łańcuch wykonany jest z 45 ogniw. Każde z nich jest w kształcie okręgu o średnicy $5\ \text{cm}$. Czy ten łańcuch jest dłuższy od $1\ \text{m}$?

Ćwiczenie 3

Obwód obręczy kosza do gry w koszykówkę wynosi około $141,\ 3\ \text{cm}$. Oblicz długość średnicy tego kosza.

Ćwiczenie 4

Koło oraz romb o przekątnych długości $8\ \mathrm{cm}$ i $6\ \mathrm{cm}$ mają taki sam obwód. Promień koła wynosi

- $\frac{10}{\pi}\ \mathrm{cm}$
- $\frac{\pi}{10}\ \mathrm{cm}$
- $\frac{20}{\pi}\ \mathrm{cm}$
- $\frac{\pi}{20}\ \mathrm{cm}$

Ćwiczenie 5

Punkt $P = (-1{,}3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $\mathrm{S} = (0{,}5)$. Promień tego okręgu

- większy od $\sqrt{5}$
- jest mniejszy od $\sqrt{5}$
- jest równy $\sqrt{5}$

Ćwiczenie 6

Trzy dyplomy zwinięte w rulony, każdy o średnicy $6\ \mathrm{cm}$ każdy, należy obwiązać wstążką. Jaka długa powinna być wstążka, jeśli na jeden węzeł i jedną kokardkę potrzeba $20\ \mathrm{cm}$? Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

Ćwiczenie 7

Koło o środku w punkcie $S = (2, -9)$ jest styczne do pewnej prostej w punkcie $A = (\ -1, -1)$. Oblicz promień koła.

Ćwiczenie 8

Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 6. Promienie tych kół są w stosunku $1 : 2$. Suma obwodów tych kół jest równa

- ◯ 12π
- ◯ 8π
- ◯ 18π
- ◯ 3π

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Długość okręgu wyraża się zawsze liczbą wymierną.
- ☐ Jeśli dwa okręgi mają równe promienie, to są przystające.
- ☐ Dla każdego okręgu stosunek jego obwodu do średnicy jest stały.
- ☐ Jeśli dwa okręgi mają równe obwody, to są współśrodkowe.

Ćwiczenie 10

Oblicz, ile razy obwód koła o promieniu 8 jest większy od

a. długości okręgu o średnicy 4

b. długości okręgu o promieniu 1

Ćwiczenie 11

Dokończ zdania tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

a. Promień koła o obwodzie 16π wynosi ...

b. Średnica koła o obwodzie π wynosi ...

Ćwiczenie 12

Ile razy zwiększy się długość okręgu, jeśli jego promień zwiększymy 2 razy?

Ćwiczenie 13

Jak zmieni się długość okręgu, jeśli jego średnicę zmniejszymy o 2?

Ćwiczenie 14

Znajdź długość okręgu

a. wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości $48 \mathrm{~cm}$

b. opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości $48 \mathrm{~cm}$

Ćwiczenie 15

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, wiedząc, że długość okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $6\pi\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 16

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $0{,}6 \mathrm{~cm}$ i $0{,}8 \mathrm{~cm}$. Na tym trójkącie opisano okrąg. Oblicz obwód tego okręgu.

Ćwiczenie 17

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa h. Znajdź stosunek obwodu koła opisanego na tym trójkącie do obwodu koła wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 18

Z koła wycięto kwadrat o polu 392 cm^2. Wykaż, że obwód tego koła jest nie mniejszy niż 88 cm.
Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.