



Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$

Źródło: Andreas Kretschmer, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Galileusz – włoski fizyk i astronom, w swojej pracy *„Rozmowy i dowody matematyczne w zakresie dwóch nowych umiejętności”* analizował ruch spadającego ciała, zrzucając z wieży w Pizie z wysokości 49 metrów metalowe kule. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość h od ziemi obiektu zrzuconego z wysokości 49 metrów można opisać wzorem $h(t) = -4,9t^2 + 49$. Otrzymany wzór jest zapisany za pomocą wyrażenia stopnia drugiego.

Podobnymi wzorami opisane są poniższe funkcje.

a) Funkcja $f(x) = 2x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$, przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x liczbę o dwa mniejszą od podwojonego jej kwadratu,

b) Funkcja $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x liczbę przeciwną do połowy jej kwadratu.

Dwie ostatnie funkcje to przykłady funkcji kwadratowych. Szczególnym przypadkiem funkcji kwadratowej jest jednomian drugiego stopnia. Jest to funkcja postaci $y = ax^2$.

Twoje cele

- Rozpoznasz jednomian stopnia drugiego.
- Sporządzisz wykres funkcji $y = ax^2$.

- Określisz własności funkcji $y = ax^2$.

Przeczytaj

Jeżeli $a \neq 0$, $b = c = 0$, to wzór $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje postać $f(x) = ax^2$. Można również krótko zapisać $y = ax^2$. Zajmiemy się funkcją opisaną tym wzorem, jej wykresem i własnościami.

Definicja: jednomian stopnia drugiego

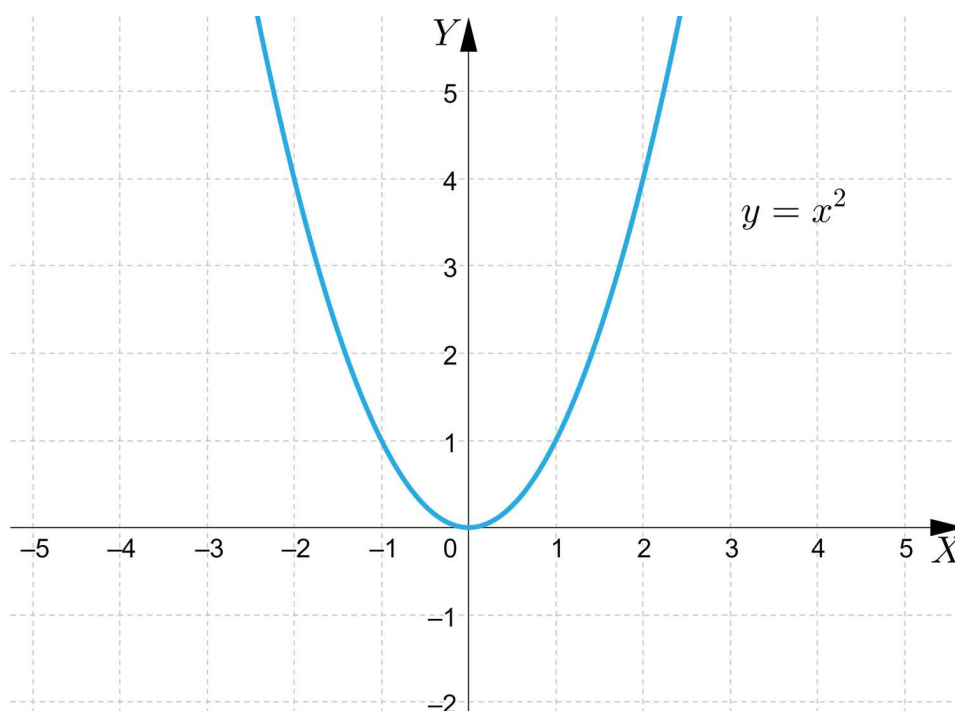
Funkcję kwadratową $y = ax^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz a jest stałą liczbą rzeczywistą różną od zera, nazywać będziemy **jednomianem stopnia drugiego** (jednomianem kwadratowym).

Sporządźmy w prostokątnym układzie współrzędnych wykres funkcji $y = x^2$.

W narysowaniu wykresu pomocna będzie tabelka częściowa - im więcej punktów w tabelce, tym dokładniejszy będzie wykres.

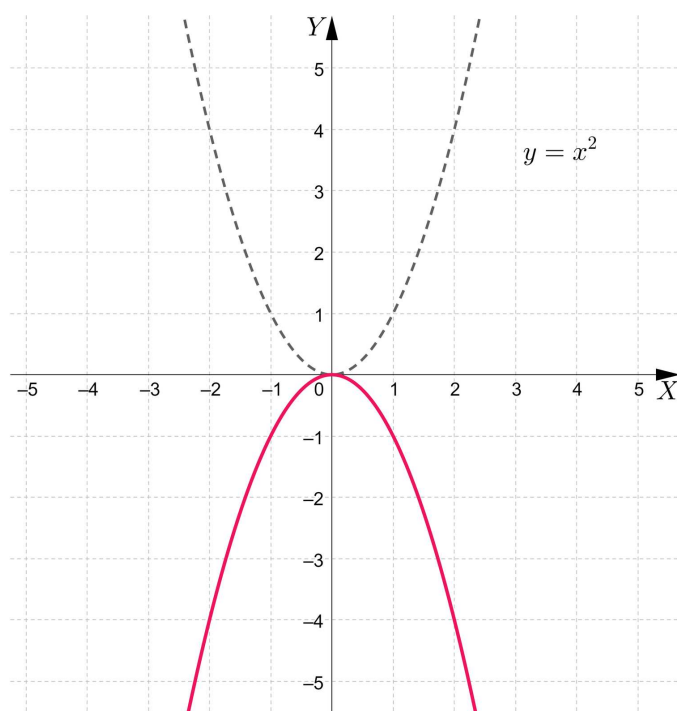
x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

Przy pomocy tabelki wyznaczyliśmy tylko niektóre wartości **jednomianu kwadratowego**, a więc znaleźliśmy niektóre punkty wykresu. Ponieważ funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej, więc otrzymane punkty tworzą pewną krzywą.



Krzywa będąca wykresem funkcji $y = x^2$ nazywa się **parabolą**. Do jej wykresu należy punkt $O = (0, 0)$, będący wierzchołkiem paraboli. Wierzchołek dzieli parabolę na dwie części, zwane ramionami paraboli. Oś Y jest osią symetrii paraboli.

Przekształćmy wykres funkcji $y = x^2$ przez symetrię względem osi X i ustalmy wzór funkcji, której wykres otrzymaliśmy.



W symetrii względem osi X obrazem dowolnego punktu $P = (x, y)$ jest taki punkt P' , że $P' = (x', y')$, gdzie $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, skąd $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

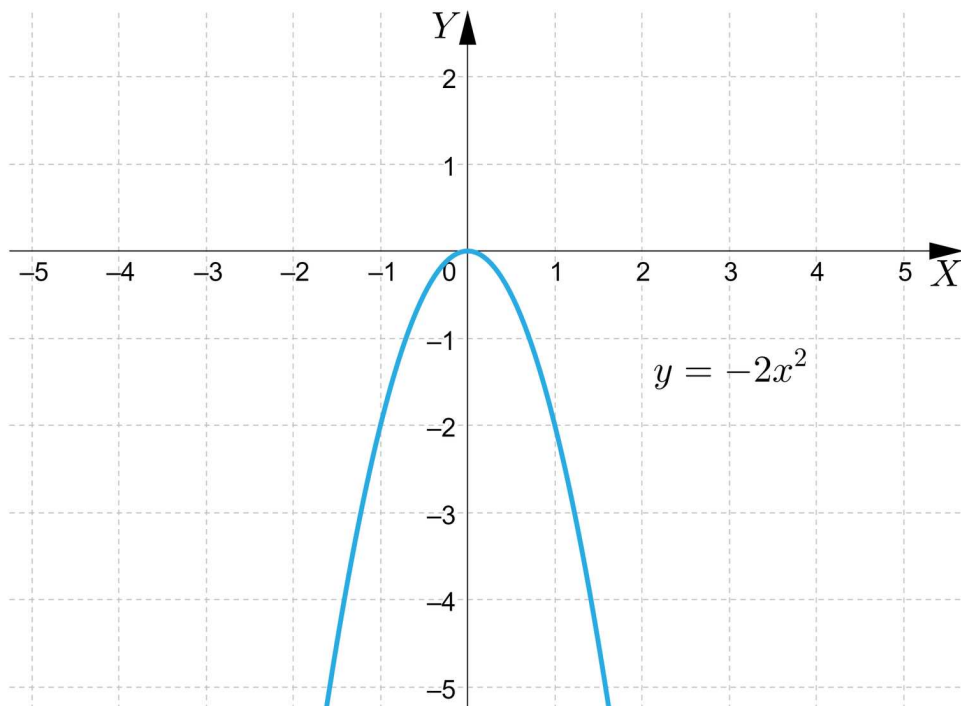
Do wzoru funkcji $y = x^2$ w miejsce x podstawiamy x' , a w miejsce y podstawiamy $-y'$ i otrzymujemy wzór $-y' = (x')^2$ czyli $y = -x^2$. Współczynnik a wynosi (-1) .

Zwróćmy uwagę, że parabola ma ramiona skierowane w dół.

Sporządzmy jeszcze dwa inne wykresy.

a) $y = -2x^2$

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-8

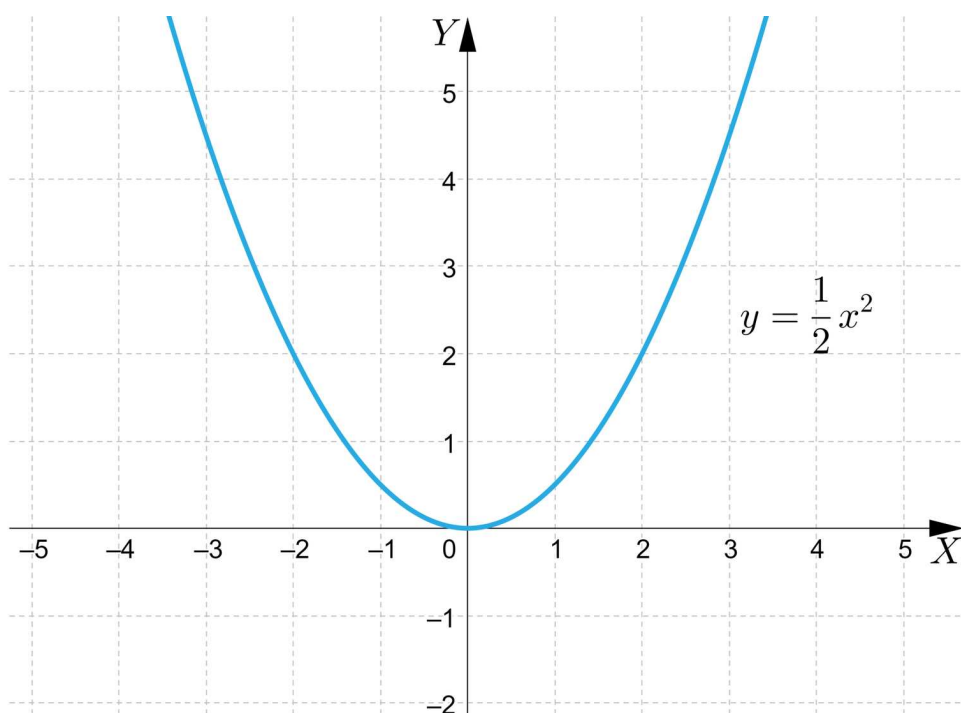


b) $y = \frac{1}{2}x^2$

x

$y = \frac{1}{2}x^2$

-4	-2	-1	0	1	2	4
8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8



Otrzymane krzywe to również parabole. Wartość współczynnika a paraboli $y = ax^2$ decyduje o tym, czy ramiona tej paraboli skierowane są w górę ($a > 0$), czy w dół ($a < 0$).

Porównując wykresy funkcji zauważymy, że funkcje postaci $y = ax^2$, gdy $a > 0$ mają wspólne własności.

Własność: Własności funkcji $y = ax^2$, gdy $a > 0$

- Wykresem każdej funkcji jest parabola o wierzchołku $W = (0, 0)$ i ramionach skierowanych ku górze.
- Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $ZW = \langle 0, +\infty \rangle$.
- Miejscem zerowym funkcji jest $x_0 = 0$.
- Ośią symetrii wykresu funkcji (paraboli) jest prosta o równaniu $x = 0$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, a rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$.
- Funkcja osiąga wartość najmniejszą równą 0, dla argumentu 0. Nie przyjmuje wartości największej. Zbiór wartości funkcji jest ograniczony z dołu, nie jest ograniczony z góry.
- Funkcja jest parzysta.
- Funkcja nie jest różnowartościowa.

Ostatnią własność spróbujemy udowodnić.

Dowód

Funkcja $y = ax^2$ nie jest różnowartościowa na zbiorze liczb rzeczywistych

Na początku przypomnijmy definicję funkcji różnowartościowej na zbiorze liczb rzeczywistych.

Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa jeżeli dla wszystkich $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest implikacja:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Aby wykazać, że funkcja nie jest różnowartościowa w zbiorze $\mathbb{R}$, wystarczy wskazać dwa różne argumenty, dla których odpowiadające im wartości funkcji są równe.

Weźmy na przykład $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Jak widzimy $x_1 \neq x_2$.

Obliczmy teraz $f(x_1)$ oraz $f(x_2)$.

Zauważmy, że

$$f(x_1) = f(1) = a \cdot 1^2 = a,$$

$$f(x_2) = f(-1) = a \cdot (-1)^2 = a.$$

Otrzymaliśmy, że dla różnych argumentów wartości funkcji są równe, więc funkcja nie jest różnowartościowa w zbiorze $\mathbb{R}$.

Analogicznie można opisać własności funkcji $y = ax^2$, gdy $a < 0$.

Przykład 1

Sprawdźmy, czy punkty $A = (-4, 64)$ oraz $B = (\frac{1}{4}, 1)$ należą do paraboli opisanej równaniem $y = 4x^2$.

$$A = (-4, 64)$$

$$y = 4x^2$$

$$y = 4 \cdot (-4)^2$$

$$y = 4 \cdot 16$$

$$y = 64$$

Punkt A należy do paraboli opisanej równaniem $y = 4x^2$.

$$B = (\frac{1}{4}, 1)$$

$$y = 4x^2$$

$$y = 4 \cdot (\frac{1}{4})^2$$

$$y = 4 \cdot \frac{1}{16}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \neq 1$$

Punkt B nie należy do paraboli opisanej równaniem $y = 4x^2$.

Przykład 2

Wyznaczmy współczynnik a , tak aby punkt o współrzędnych $(2, -8)$ należał do paraboli $y = ax^2$.

$$y = ax^2$$

$$-8 = a \cdot 2^2$$

$$-8 = 4a$$

$$a = -2$$

Przykład 3

W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji.

a) $y = \frac{1}{3}x^2, y = x^2, y = 2x^2$

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

$$x$$

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

-6	-3	-1	0	1	3	6
12	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3	12

$$y = x^2$$

$$x$$

$$y = x^2$$

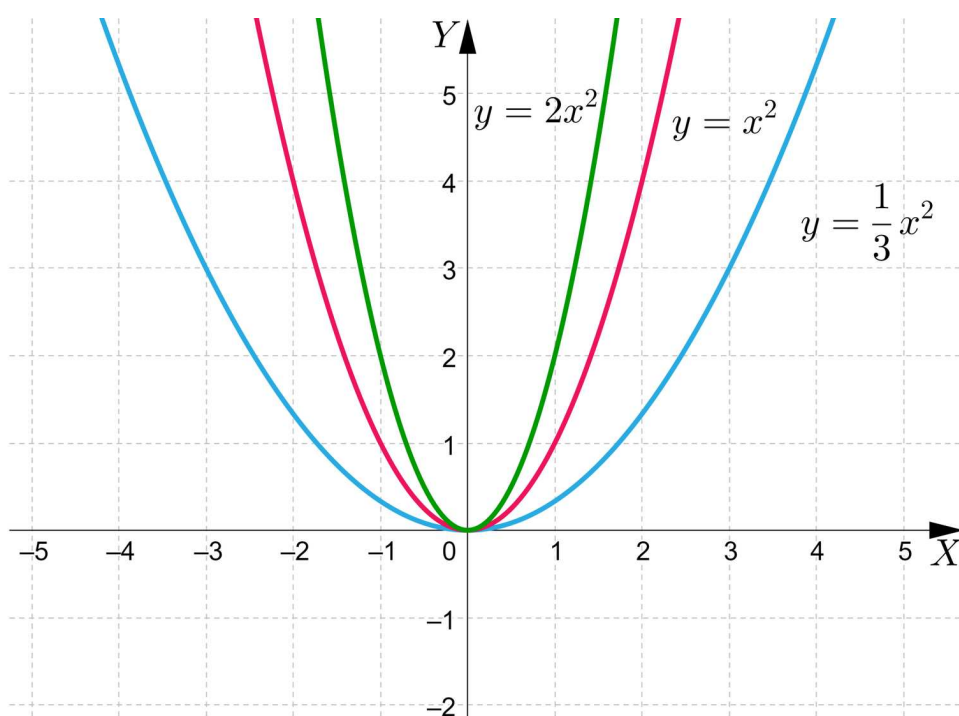
-3	-2	-1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

$$y = 2x^2$$

$$x$$

$$y = 2x^2$$

-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
8	2	0,5	0	0,5	2	8



b) $y = -\frac{1}{2}x^2, y = -x^2, y = -3x^2$

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$x$$

-4	-2	-1	0	1	2	4
----	----	----	---	---	---	---

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8
----	----	----------------	---	----------------	----	----

$$y = -x^2$$

x

$$y = -x^2$$

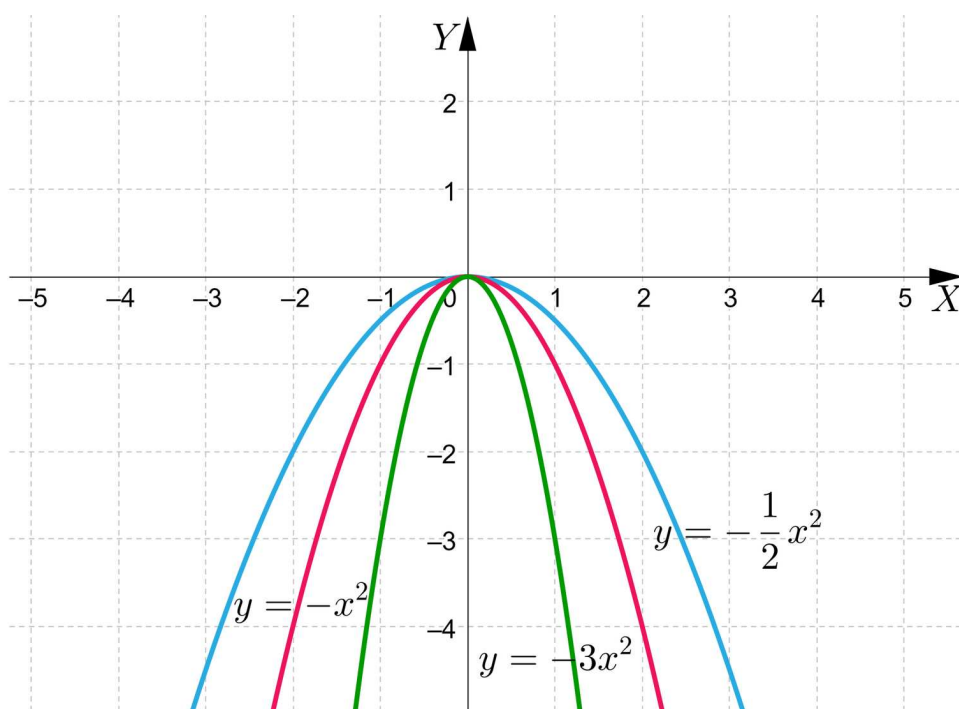
-3	-2	-1	0	1	2	3
-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

$$y = -3x^2$$

x

$$y = -3x^2$$

-2	-1	0	1	2
-12	-3	0	-3	-12

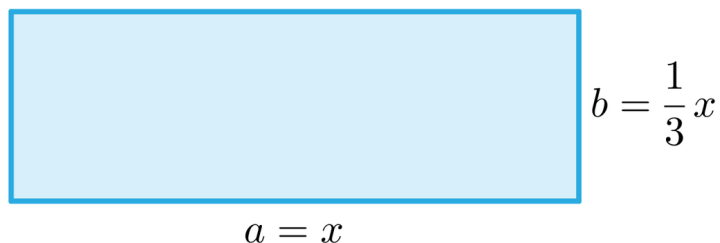


Wniosek

Im większa jest wartość bezwzględna współczynnika a , to tym bliżej osi Y znajdują się ramiona paraboli.

Przykład 4

W prostokącie stosunek długości boków jest równy 1 : 3. Podajmy wzór funkcji $y = P(x)$, opisującej pole tego prostokąta, jeżeli x oznacza długość dłuższego boku, wyznaczmy dziedzinę i naszkicujmy wykres.



Wyznamy wzór funkcji. Przyjmujemy, że $a = x$, oraz $b = \frac{1}{3}x$.

Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = ab$, więc otrzymujemy wzór funkcji

$$y = P(x)$$

$$y = x \cdot \frac{1}{3}x$$

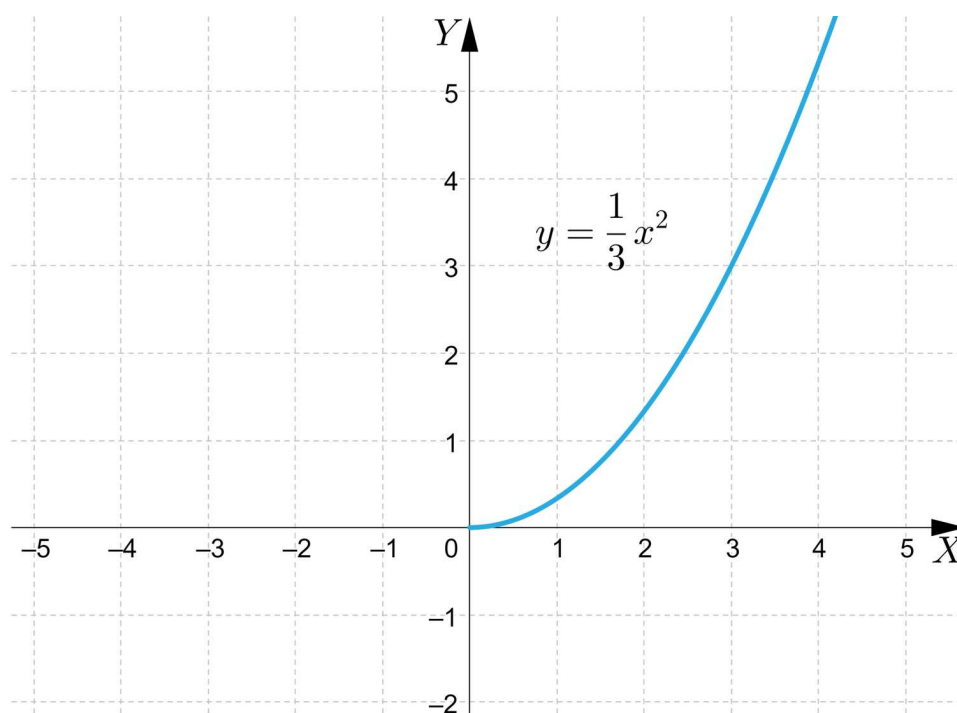
$$y = \frac{1}{3}x^2$$

Dziedziną tej funkcji jest przedział $(0, +\infty)$.

Sporządźmy tabelkę częściową dla tej funkcji.

x	1	2	3	6
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	12

I wykres



Zwróćmy uwagę, że w zagadnieniach praktycznych wykorzystujemy tylko fragment paraboli.

Przykład 5

Do studni wrzucono kamień i usłyszano plusk wody po 3 sekundach. Jaka jest odległość do lustra wody?

Wykorzystujemy wzór $h(t) = \frac{at^2}{2}$, gdzie a jest wartością przyspieszenia ziemskiego, stąd $a = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Wzór funkcji przyjmuje postać $h(t) = \frac{9,81t^2}{2}$. Ponieważ czas lotu wyniósł 3 sekundy otrzymujemy $h(3) = \frac{9,81 \cdot 3^2}{2}$, a zatem odległość do lustra wody wynosi około 44,15 m.

Parabola, to krzywa będąca zbiorem punktów równoodległych od prostej nazywanej kierownicą paraboli i punktu nazywanego ogniskiem paraboli. Ognisko paraboli to punkt, który leży na osi symetrii paraboli, a kierownica to prosta prostopadła do osi symetrii. Należy również zwrócić uwagę na fakt, że parabola jest krzywą, która posiada stały iloraz odległości od ogniska i kierownicy. Iloraz ten nazywamy mimośrodem i oznaczamy:

$$\varepsilon = \frac{\text{odległość punktu od ogniska}}{\text{odległość punktu od kierownicy}}$$

Wykres trójkianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ jest parabolą o ognisku w punkcie $S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ i kierownicy o równaniu $y = \frac{-\Delta-1}{4a}$.

Parabola ma mimośród równy 1.

Ciekawostka

Wyznamy współrzędne ogniska paraboli oraz równanie kierownicy dla funkcji wyrażającej się wzorem $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

Rozwiązanie

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 9 + 16$$

$$\Delta = 25$$

$$S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

$$S = \left(\frac{-3}{2 \cdot 1}, \frac{1-25}{4 \cdot 1}\right)$$

$$S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{24}{4}\right)$$

$$S = \left(-\frac{3}{2}, -6\right) - \text{ognisko paraboli}$$

$$y = \frac{-\Delta-1}{4a}$$

$$y = \frac{-25-1}{4 \cdot 1}$$

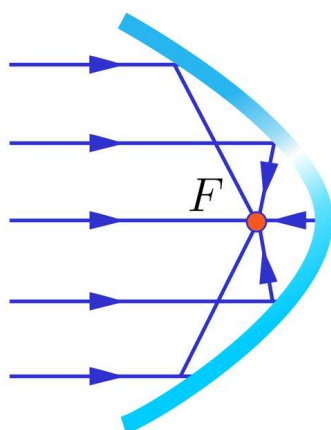
$$y = \frac{-26}{4}$$

$$y = -\frac{13}{2} \text{ - równanie kierownicy}$$

Ciekawostka

Promienie równoległe padające na lustro w kształcie paraboli po odbiciu skupiają się w jednym punkcie - ognisku paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się na przykład w antenach satelitarnych.

Zwierciadło paraboliczne



Natomiast w reflektorach wykorzystuje się własność odwrotną – promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego są równoległe.

Słownik

jednomian kwadratowy

funkcja $y = ax^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, natomiast a jest stałą liczbą rzeczywistą różną od zera

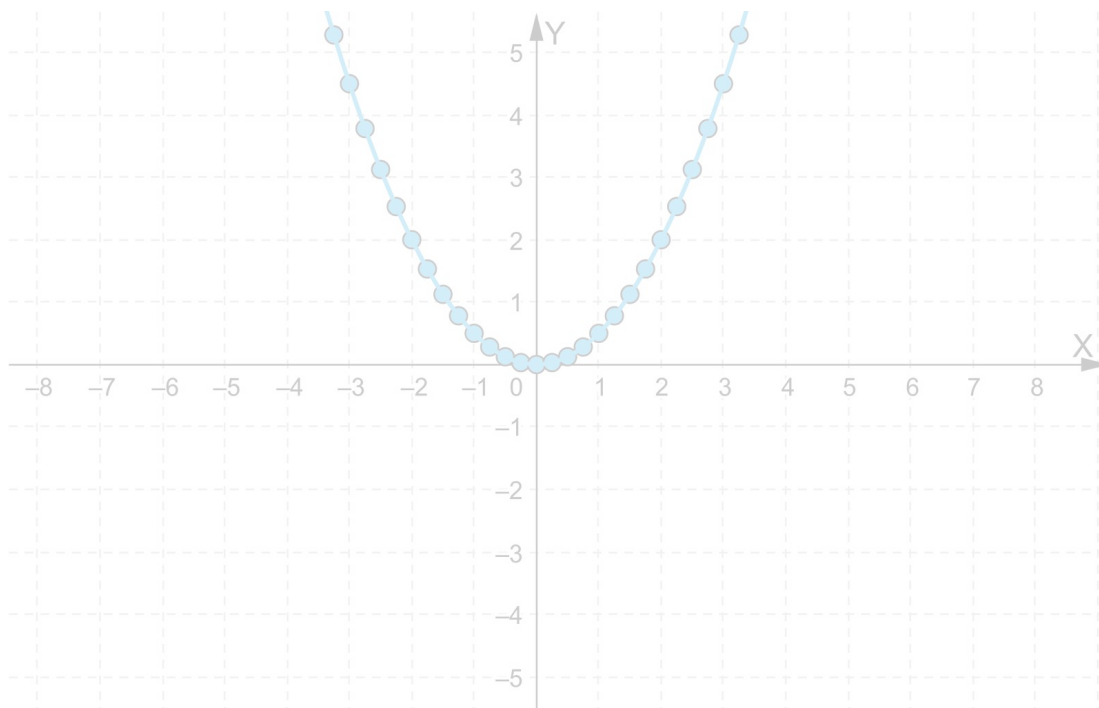
parabola

krzywa będącą wykresem funkcji kwadratowej

Aplet

Polecenie 1

Poniżej przedstawiony jest aplet ilustrujący wykres funkcji $f(x) = ax^2$. Zmieniaj wartość współczynnika a . Zaobserwuj jak zmienia się położenie ramion paraboli w zależności od a .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dgy4WYKL1>

Polecenie 2

Wykorzystaj aplet. Ustaw wartość współczynnika a , aby otrzymać parabolę o podanym równaniu i uzupełnij tabelę

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1



Dopasuj wzór funkcji do wykresu.

Ćwiczenie 2



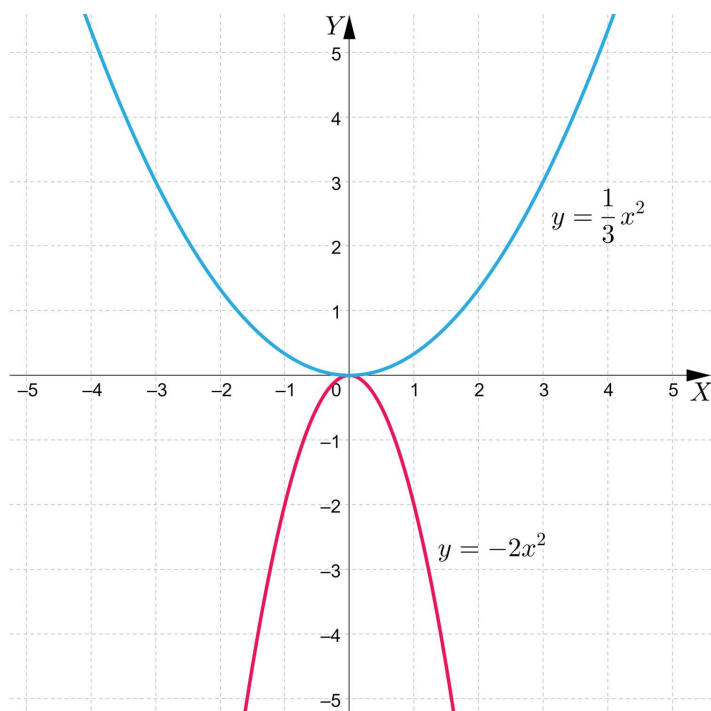
Uzupełnij tabelki częściowe.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$							
$y = 3x^2$							
$y = -2x^2$							

Ćwiczenie 3



Mając dane wykresy funkcji $y = -2x^2$ oraz $y = \frac{1}{3}x^2$ wybierz charakteryzujące je własności.



$$y = -2x^2$$

Funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$, a malejąca w przedziale $(0, +\infty)$.

Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, a rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$.

Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku $W = (0, 0)$ i ramionach skierowanych ku górze.

Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $ZW = \langle 0, +\infty \rangle$.

Funkcja przyjmuje wartości

dodatnie, gdy
 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Zbiorem wartości funkcji jest
zbiór $ZW = (-\infty, 0)$.

Wykresem funkcji jest parabola
o wierzchołku $W = (0, 0)$
i ramionach skierowanych ku
dołowi.

Ćwiczenie 4



Oblicz i uzupełnij wartość współczynnika a , wiedząc, że punkt $P = (-\frac{1}{2}, 3)$ należy do paraboli opisanej równaniem $y = ax^2$ - wpisz brakującą liczbę.

$a =$

Ćwiczenie 5



Oblicz brakującą współrzędną punktu, wiedząc, że należy on do podanego wykresu-wpisz brakującą liczbę.

a) $A = (-2\sqrt{3}, \text{ })$ i $f(x) = x^2$

b) $A = (-\frac{3}{2}, \text{ })$ i $f(x) = 4x^2$

Ćwiczenie 6



Przyporządkuj punkty należące do paraboli opisanej danym wzorem.

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$C = (4, 8)$

$G = (-1, 3)$

$B = (1, -1)$

$H = (2, 12)$

$F = (-\sqrt{2}, 1)$

$I = (3, -9)$

$D = (\sqrt{2}, 6)$

$A = (-2, 2)$

$E = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$y = 3x^2$

$y = -x^2$

Ćwiczenie 7



Oblicz współrzędne punktów przecięcia paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ z prostą o równaniu $y = 8$.
Wybierz punkty, które spełniają warunki zadania.

☐ $B = (-4, -8)$

☐ $C = (-2, 8)$

☐ $E = (2, 8)$

☐ $A = (-4, 8)$

☐ $D = (4, 8)$

Ćwiczenie 8



Podaj wzór funkcji opisującej pole kwadratowej działki w zależności od długości przekątnej x , wyznacz dziedzinę otrzymanej funkcji oraz sporządź odpowiedni wykres.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Podziemska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sporządza wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci jednomianu stopnia drugiego
- rozpoznaje i odczytuje własności funkcji kwadratowej z wykresu,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem
- dyskusja dydaktyczna,

- burza mózgów

Formy pracy:

- praca w parach,
- praca indywidualna.

Środki dydaktyczne:

- tablica interaktywna,
- komputer z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Przedstawienie tematu lekcji.
- Wyznaczenie celów i kryteriów sukcesu.
- Dyskusja dotycząca aktualnego stanu wiedzy uczniów w zakresie poruszanej tematyki.

Faza realizacyjna:

- Zapoznanie uczniów z informacjami z sekcji „Przeczytaj” – uczniowie analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Burza mózgów – jak najszybciej wykonać wykres jednomianu kwadratowego.
- Wykorzystanie apletu do zilustrowania innych wykresów oraz do odczytania własności funkcji z uwzględnieniem wniosków dotyczących współczynnika a
- Samodzielne wykonanie ćwiczeń nr 2,4,5 z sekcji „Sprawdź się” przez uczniów.
- Ćwiczenia 1,2,6,7,8 z sekcji „Sprawdź się” uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
- Sprawdzenie poprawności wykonanych zadań i omówienie ich wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów powstałych podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

- Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$ „).

Materiały pomocnicze:

Wykres funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie wykorzystania wzoru funkcji kwadratowej $y = ax^2$.

„Aplet” można wykorzystać w realizacji tematu „*Wykres funkcji i wykresy wybranych funkcji*”.