



Zastosowanie logarytmów w obliczeniach z fizyki

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Mapa myśli
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zastosowanie logarytmów w obliczeniach z fizyki

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Już samo słowo logarytm budzi strach u wielu humanistów, nie mówiąc już o twierdzeniach logarytmicznych. Jednak okazuje się, że logarytmy są przydatne nie tylko po to, aby zwiększać trudność zadań maturalnych, ale można je wykorzystać w całkiem przyjemny sposób, na przykład określając muzyczne interwały, badając kształt muszli, czy sprawdzając poprawność obliczeń księgowych.

W psychologii prawo określające związek między czasem potrzebnym jednostce na podjęcie decyzji a liczbą możliwych wyborów, opisane jest za pomocą logarytmów.

Suwaki logarytmiczne były przez wiele lat wykorzystywane jako przeliczniki miar, służyły do określania dawki leku, towarzyszyły kosmonautom w misji Apollo. Wciąż są używane w chemii analitycznej, przez pętlonurków i jako suwaki – kalkulatory zużycia paliwa.



Przekrój muszli Nautilus pompilius

Źródło: Chris 73, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

W tym materiale pokażemy przykłady zastosowania logarytmów w prostych obliczeniach z fizyki.

Twoje cele

- Zastosujesz logarytmy w obliczeniach z fizyki.
- Przekształcisz wyrażenia zawierające logarytmy.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny opisując sytuację z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

W tym materiale pokażemy kilka zastosowań logarytmów w obliczeniach z fizyki. Przekształcając podane wzory, wykorzystamy własności logarytmów. Dla przypomnienia podamy najpierw definicję logarytmu.

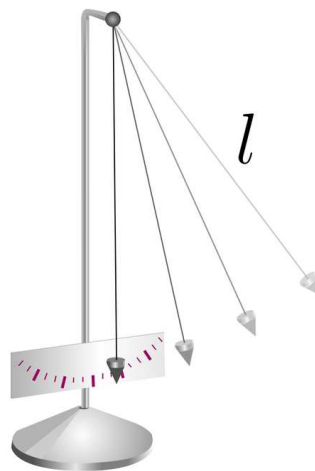
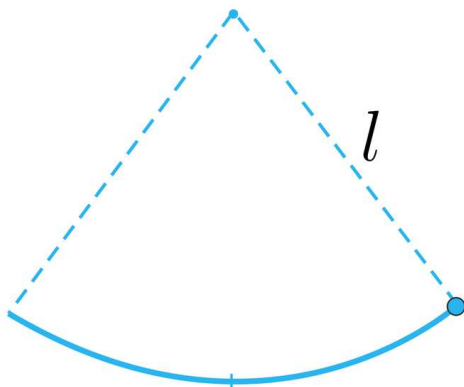
Definicja: logarytm

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b .

Wahadło

Wahadło matematyczne to ciało zawieszone w jednorodnym polu grawitacyjnym w taki sposób, że może wykonywać drgania wokół poziomej osi, nieprzechodzącej przez środek ciężkości zawieszonoego ciała.

Dla małych drgań wahadła okres drgań nie zależy od amplitudy a jedynie od długości wahadła i przyspieszenia grawitacyjnego.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie:

T – okres drgań

l – długość wahadła

g – przyspieszenie ziemskie

Zauważmy, że podany wzór obowiązuje nie tylko w odniesieniu do drgań wahadła na Ziemi, ale też na innych planetach. Na Księżycu dane wahadło miałoby $\sqrt{6}$ razy dłuższy okres drgań, gdyż przyspieszenie grawitacyjne jest tam około sześciokrotnie mniejsze niż na Ziemi.

Przykład 1

Obliczymy, jaką długość powinno mieć wahadło, aby jego okres drgań w Warszawie wynosił 1 s. Przyjmijmy, że przyspieszenie ziemskie w Warszawie jest równe $981,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

Wyznamy l ze wzoru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie $T = 1 \text{ s}$, $g = 981,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.

Zapisujemy wzór w postaci dogodniejszej dla obliczeń i podstawiamy do wzoru dane.

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{981,2}} = 1$$

Logarytmujemy obie strony równania i przekształcamy.

$$\log\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{981,2}}\right) = \log 1$$

$$\log 2\pi + \log \sqrt{\frac{l}{981,2}} = 0$$

$$\log 2\pi + 0,5(\log l - \log 981,2) = 0$$

$$0,5 \log l = 0,5 \log 981,2 - \log 2\pi$$

Odczytujemy z tablic logarytmicznych przybliżone wartości odpowiednich [logarytmów](#).

$$\log 981,2 \approx 2,9918$$

$$\log 2\pi \approx \log 6,28 \approx 0,7980$$

Stąd:

$$0,5 \log l \approx 0,5 \cdot 2,9918 - 0,7980$$

$$0,5 \log l \approx 1,4959 - 0,7980 = 0,6979$$

$$\log l \approx 1,3958.$$

Ponownie sięgamy do tablic logarytmicznych.

$$l \approx 24,88 \text{ cm}$$

Rozwiąż powyższy przykład bez użycia logarytmów. Porównaj otrzymane wyniki.

Absolutna wielkość gwiazdowa

Absolutna wielkość gwiazdowa to obserwowana wielkość gwiazdowa (wyrażona w magnitudo), jaką miałby obiekt oglądany z pewnej odległości przy braku pochłaniania światła w przestrzeni międzygwiazdnej.

W przypadku, gdy obiekt znajduje się poza Układem Słonecznym, za odległość odniesienia przyjęto 10 parseków.

Parsek to jednostka odległości używana w astronomii.

1 parsek to około 3,26 roku świetlnego.

1 parsek to około $3,1 \cdot 10^{16}$ m.

Absolutna wielkość gwiazdowa jest miarą jasności ciał niebieskich. Obserwowana wielkość gwiazdowa to jasność obserwowana gwiazdy w skali wielkości gwiazdowych.

Zależność między wielkością obserwowaną a absolutną wyraża się wzorem

$$M = m - 5(\log r - 1),$$

gdzie:

M – wielkość absolutna obiektu, określona jako wielkość obserwowana z odległości 10 parseków,

m – wielkość obserwowana,

r – odległość między obserwatorem a obiektem, wyrażona w parsekach.

Przykład 2

Obliczymy jasność absolutną obiektu znajdującego się w odległości 652 lat świetlnych, którego jasność obserwowana równa jest 0,11.

Rozwiązanie

Ponieważ 1 parsek to 3,26 roku świetlnego, zatem 652 lata świetlne to 200 parseków.

Zatem:

$$m = 0,11$$

$$r = 200 \text{ parseków}$$

Podstawiamy te dane do wzoru na wielkość absolutną.

$$M = 0,11 - 5(\log 200 - 1)$$

$$M = 0,11 - 5(\log 2 + 2 - 1)$$

$$M \approx 0,11 - 5(0,3010 + 1) = -6,395$$

Jasność absolutna obiektu jest równa około $(-6, 395)$.

Rząd wielkości

Rząd wielkości to przybliżone oszacowanie wartości danej liczby, określające w przyjętej skali przedział, w którym ta wielkość się znajduje. Znajomość rzędu wielkości pozwala na przykład ocenić rozmiar wpływu tej wielkości na wyniki obliczeń.

Rząd wielkości wyrażony jest przez całkowitą potęgę liczby 10 najbliższą wartości szacowanej liczby.

Na przykład:

- liczba 1, 21 jest rzędu jedności, czyli 10^0 ,
- liczba $8 \cdot 10^8$ jest rzędu 10^9 ,
- liczba $7,9 \cdot 10^{-11}$ jest rzędu 10^{-10} .

W matematyce do określania rzędu wielkości używa się też [logarytmów](#). Rząd wielkości to najbliższa całkowita wartość [logarytmu](#) dziesiętnego danej liczby.

Przykład 3

Człowiek waży 70 kg a świerszcz 0,007 g. Obliczymy, o ile rzędów wielkości masa człowieka jest większa od masy świerszcza.

Rozwiązanie

$$0,007 \text{ g} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$\log 70 - \log(7 \cdot 10^{-6}) = \log \frac{70}{7 \cdot 10^{-6}} = \log 10^7 = 7$$

Masa człowieka jest o siedem rzędów wielkości większa od masy świerszcza.

Poziom natężenia dźwięku

Miarą siły dźwięku jest natężenie dźwięku. Jednostką natężenia dźwięku jest $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

W zakresie słyszalności człowieka dla dźwięku o częstotliwości 1000 Hz natężenie dźwięku przyjmuje wartość od $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ do $10^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Pierwsza wartość odpowiada progowi słyszalności, druga granicy bólu. Posługiwanie się natężeniem dźwięku nie jest wygodne, bowiem stosunek największej wartości natężenia do najmniejszej wyraża się bardzo dużą liczbą 10^{14} . Dlatego wprowadzono pojęcie poziomu natężenia dźwięku, który określa względną wartość natężenia wzorem

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

gdzie:

L – poziom natężenia dźwięku,

I – natężenie dźwięku,

I_0 – natężenie dźwięku odniesienia wynoszące $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Jednostką poziomu natężenia dźwięku jest decybel (dB).

Poziom natężenia dźwięku	
Wartość w dB	Opis
10	szelest liści przy łagodnym wietrze
20	szept
60	rozmowa
70	samochód
90	ruch uliczny
130	start samolotu

Przykład 4

Natężenie muzyki na dyskotecce jest 100000 razy większe niż natężenie rozmowy. Obliczymy w decybelach poziom natężenia dźwięku na dyskotecce.

Rozwiązanie

Z tabelki zamieszczonej powyżej odczytujemy, że poziom natężenia rozmowy jest równy 60 dB.

Wyznamy natężenie dźwięku odpowiadające rozmowie.

$$60 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10 \log I - 10 \log 10^{-12} / : 10$$

$$6 = \log I + 12$$

$$\log I = -6$$

$$I = 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Natężenie muzyki (oznaczamy I_1) jest 100000 razy większe niż natężenie rozmowy, zatem

$$I_1 = 100000 \cdot I = 10^5 \cdot 10^{-6} = 10^{-1}$$

Zatem poziom natężenia muzyki na dyskotecce:

$$10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-1}}{10^{-12}} = 10 \cdot 11 = 110$$

Odpowiedź: poziom natężenia dźwięków na dyskotecce jest równy 110 dB.

Skala Richtera

Skala Richtera jest skalą logarytmiczną określającą wielkość trzęsienia Ziemi na podstawie amplitudy drgań wstrząsów sejsmicznych. Skala ta określa energię wytworzoną w czasie wstrząsu. Każdy kolejny stopień oznacza dziesięciokrotnie większą poziomą amplitudę drgań oraz około 32-krotnie większą energię.

Skala Richtera	Skutki
2,0 – 3,4	Wstrząsy odczuwalne przez niewielką grupę ludzi
2,0 – 3,4	Wstrząsy odczuwalne przez wszystkich, powodujące niewielkie zniszczenia
6,2 – 6,9	Duże wstrząsy, powodujące znaczne zniszczenia
7,0 – 7,3	Poważne zniszczenia
7,4 – 8,0	Ogromne zniszczenia
8,1 – 8,9	Ogromne zniszczenia, katastrofalne skutki dla wielu miast

Siła trzęsień Ziemi określana w skali Richtera opisana jest wzorem

$$R = \log \frac{A}{A_0},$$

gdzie:

A – amplituda trzęsienia Ziemi wyrażona w cm,

A_0 – amplituda wzorcowa równa 10^{-4} cm.

Przykład 5

Obliczymy amplitudę trzęsienia Ziemi o sile 6 w skali Richtera.

Rozwiązanie

$$6 = \log \frac{A}{10^{-4}}$$

$$6 = \log A - \log 10^{-4}$$

$$\log A = 6 - 4 = 2$$

$$\log A = 2$$

$$A = 10^2 = 100 \quad A = 100$$

Amplituda tego trzęsienia Ziemi wynosiła 100 cm.

Słownik

logarytm

logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b

Mapa myśli

Polecenie 1

Poniżej widzisz mapę myśli, na której przedstawiono zastosowanie logarytmów w fizyce. Podaj swój przykład wykorzystania logarytmów w fizyce. Kliknij przycisk Edytuj, wypełnij pola tekstowe. Następnie wybierz przycisk Generuj.

Polecenie 2

Jeśli liczba zapisana jest w postaci $m \cdot 10^n$, gdzie $m \in \langle 1, 10 \rangle$, to do jej zapisu potrzeba $n + 1$ cyfr. Korzystając z logarytmów określ, ile cyfr będzie w zapisie liczby 8^{20} , przyjmując, że $\log 2 = 0,3010$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Pierwsza prędkość kosmiczna to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać obiektowi względem przyciągającego go ciała niebieskiego, aby poruszał się on po zamkniętej orbicie.

Pierwszą prędkość kosmiczną można wyznaczyć ze wzoru

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

gdzie:

v_1 – pierwsza prędkość kosmiczna,

G – stała grawitacji,

M – masa ciała niebieskiego, R – promień planety.

Oblicz, korzystając z logarytmów, pierwszą prędkość kosmiczną dla Ziemi. Wynik zaokrąglij do jedności. Przyjmij:

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Oblicz za pomocą logarytmów, z jaką prędkością początkową wystrzelono do góry pocisk, jeśli osiągnął on wysokość 2000 m. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wynik podaj z dokładnością do $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie logarytmów w obliczeniach z fizyki

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

I. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje logarytmy w obliczeniach z fizyki;
- przekształca wyrażenia zawierające logarytmy;
- dobiera odpowiedni model matematyczny, opisując sytuację z kontekstem realistycznym;
- analizuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wzorów i opisów;
- kształtuje umiejętności związane z pracą w grupie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- grupa dla grupy
- praca z obserwatorem

Formy pracy:

- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu, w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Uczniowie powtarzają wspólnie wiadomości dotyczące logarytmów – może to być na przykład szybki test przygotowany wcześniej przez nauczyciela, na pytania którego uczniowie odpowiadają kolejno.
- Dyskusja – do czego mogą przydać się logarytmy? Uczniowie dzielą się posiadaną wiedzą, snują przypuszczenia.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie pracują w 5 grupach metodą „grupa dla grupy”. Zadaniem każdej z grup jest zapoznanie się z jednym z zastosowań logarytmów zapisanych w sekcji Przeczytaj w taki sposób, aby uzyskane wiadomości przekazać innym grupom.
- Następnym etapem zajęć jest zaprezentowanie przez grupy uzyskanych wiadomości i pokazanie sposobu rozwiązania zadania zamieszczonego w odpowiednim przykładzie.
- W każdej grupie jedna osoba pełni rolę obserwatora, który obserwuje w jaki sposób zostały przydzielone role w grupie, jak uczniowie wywiązywali się z powierzonych im ról.
- Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

- Każdy z obserwatorów przedstawia wyniki swoich obserwacji, jednocześnie konfrontując je z obserwacjami lidera danej grupy.

- Dyskusja na temat, czy łatwo jest pełnić wyznaczoną rolę w grupie i dlaczego.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.
- Podsumowaniem zajęć jest zapoznanie się z mapą myśli przez uczniów.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest uzyskanie informacji, w jakich jeszcze dziedzinach wiedzy wykorzystywane są logarytmy.

Materiały pomocnicze:

- [Przykłady zadań na logarytmach](#)

Wskazówki metodyczne:

- Mapa myśli może być starterem do zajęć, a nie ich podsumowaniem. Można ją wykorzystać też na zajęciach z fizyki.