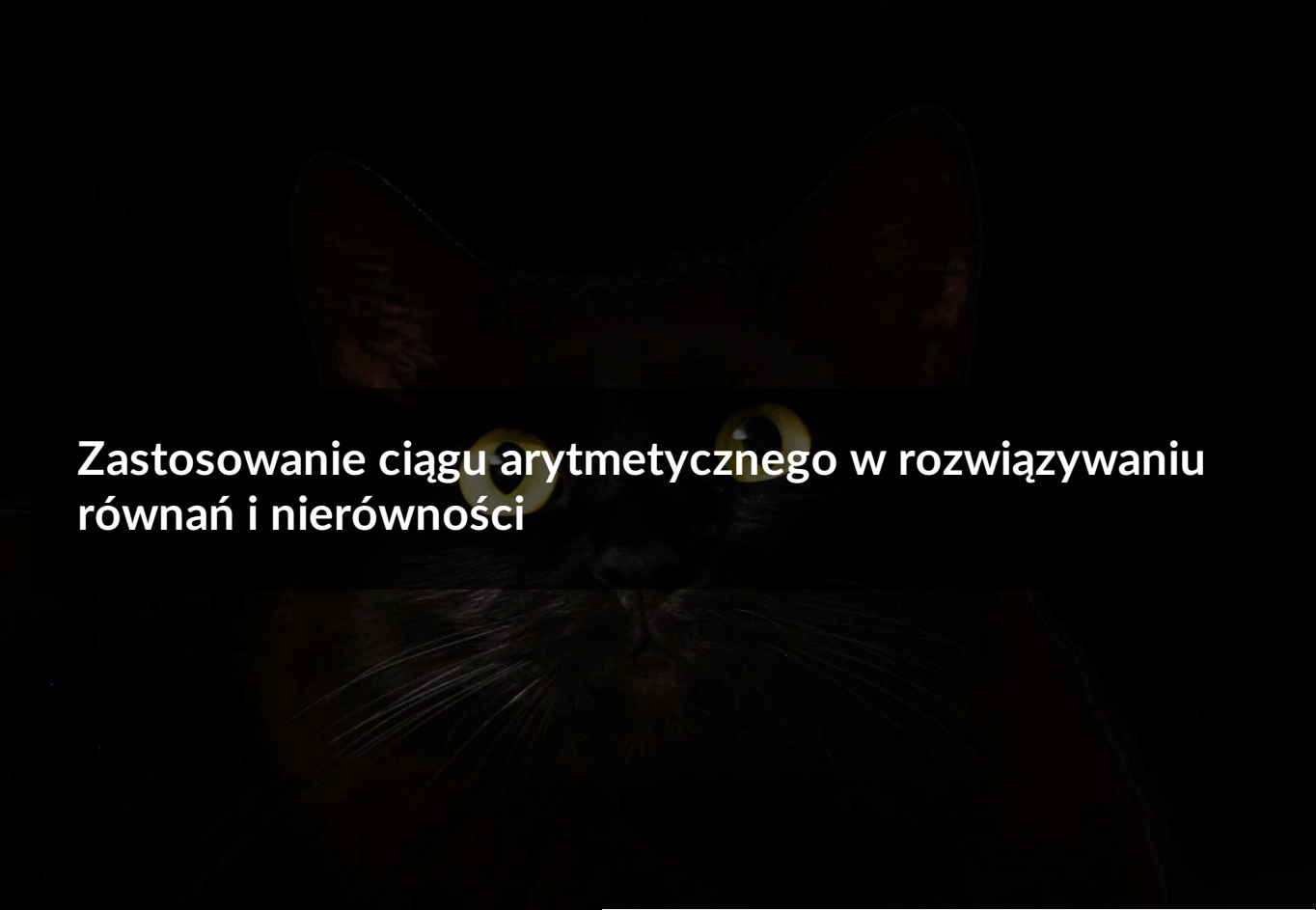




Zastosowanie ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

“ Matematyk to ślepiec
w ciemnym pokoju szukający
czarnego kota, którego tam
w ogóle nie ma.

Karol Darwin

W tym materiale będziemy postępować trochę na wzór myśli wygłoszonej przez dziewiętnastowiecznego brytyjskiego przyrodnika Karola Darwina. Czyli będziemy wiązać proste rozwiązywanie równań, nierówności, układów równań z dziwnym pojęciem, jakim jest ciąg arytmetyczny. Wykorzystamy więc wzory i twierdzenia związane z tym ciągiem, przekształcając wyrażenia algebraiczne. Ważne będzie przy



Czarny kot

Źródło: [LukaszKadlewa](https://commons.wikimedia.org), dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY 3.0.

tym uwzględnienie warunków, jakie muszą spełniać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

Twoje cele

- Powtórzysz i rozwiniesz umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych.
- Zastosujesz w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym.
- Zbudujesz model matematyczny problemu związanego z zastosowaniem sumy wyrazów ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności.

Przeczytaj

Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że równanie wielomianowe stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych. Przy czym każde równanie wielomianowe stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jest to ważna informacja, z której będziemy korzystać rozwiązując równania, których współczynniki bądź pierwiastki są wyrazami ciągu arytmetycznego.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Rozwiązanie pierwszego przykładu prowadzi do znalezienia ostatniego wyrazu skończonego ciągu arytmetycznego.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$, którego składniki lewej strony są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie:

Liczba 1 jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a liczba x ostatnim. Oznaczmy ten ciąg (a_n) , a r – jego różnicę.

Wtedy:

 $r = 7 - 1 = 6$ i $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 6 = 6n - 5$, gdzie $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Ostatnim wyrazem ciągu $1, 7, 13, \dots, x$ jest liczba x , zatem $x = 6n - 5$.

Lewą stronę równania przedstawiamy w prostszej postaci – korzystamy ze wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{1 + 6n - 5}{2} \cdot n = 280$$

$$6n^2 - 4n = 560$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$6n^2 - 4n - 560 = 0$$

$$\Delta = 13456 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 116$$

$$n = \frac{-112}{12} < 0 - \text{nie spełnia warunków zadania}$$

lub

$$n = 10$$

Wynika z tego, że dodano dziesięć wyrazów ciągu, więc $x = a_{10}$.

$$x = 6 \cdot 10 - 5 = 55$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 55.

Rozwiązanie kolejnego problemu wymaga nie tylko rozwiązania pewnego równania, ale również układu równań z trzema niewiadomymi.

Przykład 2

Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, w którym pierwszy wyraz jest o 6 większy od trzeciego. Równanie $acx^2 + (a - bc)x - b = 0$ z niewiadomą x ma dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 4. Znajdziemy drugie rozwiązanie tego równania.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $a = c + 6$.

Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, więc $c - b = b - a$, czyli $2b = c + a$.

Jednym z rozwiązań równania jest liczba 4, więc $16ac + (a - bc) \cdot 4 - b = 0$.

W ten sposób uzyskaliśmy układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

$$\begin{cases} a = c + 6 \\ 2b = c + a \\ 16ac + (a - bc) \cdot 4 - b = 0 \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ równań metodą podstawiania. Wyznaczone a podstawiamy do drugiego i do trzeciego równania.

$$\begin{cases} a = c + 6 \\ 2b = c + c + 6 \\ 16c(c + 6) + 4(c + 6) - 4bc - b = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy uzyskany układ równań.

$$\begin{cases} a = c + 6 \\ b = c + 3 \\ 16c^2 + 96c + 4c + 24 - 4(c + 3)c - (c + 3) = 0 \end{cases}$$

Żeby nie komplikować zapisów, wyodrębnimy z układu równań trzecie równanie i rozwiążemy je.

$$16c^2 + 100c + 24 - 4c^2 - 12c - c - 3 = 0$$

$$12c^2 + 87c + 21 = 0 \quad | : 3$$

$$4c^2 + 29c + 7 = 0$$

$$\Delta = 29^2 - 112 = 841 - 112 = 729 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 27$$

$$c = -7 \text{ lub } c = -\frac{1}{4}$$

- Jeśli $c = -7$ to $a = -1$ i $b = -4$.

Liczby $-1, -4, -7$ tworzą [ciąg arytmetyczny](#) o różnicy -3 .

Rozwiązywane równanie ma postać:

$$7x^2 - 29x + 4 = 0$$

Wyznaczamy pierwiastki równania.

$$\Delta = 729 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 27$$

$$x = \frac{1}{7} \text{ lub } x = 4$$

- Jeśli $c = -\frac{1}{4}$ to $a = \frac{23}{4}$ i $b = \frac{11}{4}$.

Liczby $\frac{23}{4}, \frac{11}{4}, -\frac{1}{4}$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy -3 .

Rozwiązywane równanie ma postać:

$$23x^2 - 103x + 44 = 0$$

Wyznaczamy pierwiastki równania.

$$\Delta = 6561 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 81$$

$$x = \frac{11}{23} \text{ lub } x = 4$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $\frac{1}{7}$ i 4 lub $\frac{11}{23}$ i 4.

Rozwiążemy teraz równanie stopnia trzeciego z parametrem, wykorzystując własności ciągu arytmetycznego.

Przykład 3

Znajdziemy taką wartość parametru m , dla której rozwiązaniami równania $x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0$ są trzy różne liczby, będące kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać równanie $x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0$, rozkładamy równanie na czynniki.

$$x^2(x - m) - 4(x - m) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x - m) = 0$$

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej alternatywy.

$$x^2 - 4 = 0 \text{ lub } x - m = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = m$$

Aby wyznaczyć liczbę m rozpatrzmy następujące przypadki.

- Kolejne wyrazy ciągu: $-2, 2, m$. Różnica ciągu: $r = 2 - (-2) = 4$, stąd $m = 2 + 4 = 6$.
- Kolejne wyrazy ciągu: $m, 2, -2$. Różnica ciągu: $r = -2 - 2 = -4$, stąd $m = 2 + 4 = 6$.
- Kolejne wyrazy ciągu: $-2, m, 2$. Ze związku między wyrazami ciągu arytmetycznego: $m = \frac{-2+2}{2} = 0$.
- Kolejne wyrazy ciągu: $2, m, -2$. Ze związku między wyrazami ciągu arytmetycznego: $m = \frac{-2+2}{2} = 0$.
- Pozostałe dwa przypadki pozostawiamy Ci do rozpatrzenia.

Odpowiedź:

Dla $m = 0$ lub $m = \pm 6$ rozwiązaniami równania $x^3 - mx^2 - 4x + 4m = 0$ są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

W następnym zadaniu rozwiążemy układ równań z trzema niewiadomymi. Aby uprościć zapis rozwiązania, nie będziemy przepisywać całego układu równań, ale postąpimy w sposób „kombinowany” – łącząc parami równania układu.

Przykład 4

Określmy, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - y + z = 2,5 \\ 2x - y + z = 7 \end{cases}$$

są liczby x, y, z tworzące w tej kolejności ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - y + z = 2,5 \\ 2x - y + z = 7 \end{cases}$$

z drugiego równania układu wyznaczamy $-y + z$ i podstawiamy do równania trzeciego, z którego wyznaczamy x .

$$-y + z = 2,5 - x$$

$$2x - y + z = 7$$

$$2x + 2,5 - x = 7$$

$$x = 4,5$$

Ponieważ liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny, zatem z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego wynika, że

$$y = \frac{4,5+z}{2}.$$

Zatem

$$z = 2y - 4,5.$$

Wyznaczone x wstawiamy do drugiego z równań układu i wyznaczamy y .

$$x - y + z = 2,5$$

$$4,5 - y + 2y - 4,5 = 2,5$$

$$y = 2,5$$

Obliczamy teraz trzecią niewiadomą.

$$z = 2y - 4,5$$

$$z = 2 \cdot 2,5 - 4,5 = 0,5$$

Wreszcie podstawiamy wyznaczone liczby do równania pierwszego i obliczamy m .

$$mx + y + z = 0$$

$$4,5m + 2,5 + 0,5 = 0$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Rozwiązania rozważanego układu równań tworzą **ciąg arytmetyczny** dla $m = -\frac{2}{3}$.

W ostatnim przykładzie rozwiążemy nierówność, pamiętając o dziedzinie ciągu arytmetycznego.

Przykład 5

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 2, a iloczyn wyrazu pierwszego i czwartego jest równy 1. Znajdziemy wartość liczby m , dla której

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m < 60$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

r – różnicę ciągu (a_n) .

Wtedy

$$a_3 = a_1 + 2r \text{ i } a_4 = a_1 + 3r$$

Na podstawie treści zadania, zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_1 \cdot a_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 2r = 2 \\ a_1 \cdot (a_1 + 3r) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + r = 1 \\ a_1 \cdot (a_1 + 3r) = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} r = 1 - a_1 \\ 2a_1^2 - 3a_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie układu jest równaniem kwadratowym – rozwiążemy je.

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$a_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ lub } a_1 = \frac{3+1}{4} = 1$$

- Jeśli $a_1 = \frac{1}{2}$ to $r = \frac{1}{2}$ i $a_m = \frac{1}{2} + (m-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m$.

Rozwiązujemy nierówność

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m < 60$$

Lewą stronę nierówności przekształcamy, korzystając ze wzoru na sumę kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}}{2} \cdot m < 60$$

$$m^2 + m - 240 < 0$$

$$\Delta = 961 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 31$$

$$m = -16 < 0$$

lub

$$m = 15$$

Nierówność jest spełniona dla $m \in (-16, 15)$.

Jednak wiemy, że m jest liczbą naturalną dodatnią (gdyż a_m jest wyrazem ciągu arytmetycznego).

Stąd $m = 1, 2, 3, \dots, 14$.

- Jeśli $a_1 = 1$ to $r = 0$ i $a_m = 1$.

Rozwiązujemy nierówność

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m < 60$$

$$m \cdot 1 < 60$$

$$m < 60$$

Ponieważ m jest liczbą naturalną dodatnią, więc $m = 1, 2, 3, \dots, 59$.

Odpowiedź:

Jeśli pierwszy wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{2}$ to $m \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}$.

Jeśli pierwszy wyraz ciągu jest równy 1, to $m \in \{1, 2, 3, \dots, 59\}$.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą zastosowanie wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zadania, a następnie porównaj je z zawartymi w animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DkNB8u0d6>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania ciągu arytmetycznego.

Polecenie 2

Ile co najmniej liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 3 należy dodać, aby otrzymana suma była większa od 300?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Lewa strona równania $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$ jest sumą początkowych kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Ile wyrazów ciągu dodano? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 27

☐ 9

☐ 52

☐ 53

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Lewa strona nierówności $1 + 5 + 9 + \dots + x < 153$ jest sumą początkowych kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) .

Liczbę x można dla $n \in \mathbb{N}_+$ zapisać w postaci:

☐ $4n - 3$

☐ $4n - 1$

☐ $3n + 1$

☐ $n + 4$

Ćwiczenie 3



Rozwiązaniami równania $mx^3 - (2m + 1)x^2 + (2 - 3m)x + 3 = 0$, gdzie $m \neq 0$ są trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby.

Dla $m = 1$ rozwiązaniami równania są liczby, zapisane od najmniejszej do największej:

, , .

Ćwiczenie 4



Lewa strona równania $5 + 7 + 9 + \dots + x = 3840$ jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Liczba x jest mniejsza od 100.

☐ Liczbę x można zapisać w postaci $2n + 3$.

☐ Liczba x jest większa od 150.

☐ Dodano 60 wyrazów ciągu.

Ćwiczenie 5



Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 4n - 3$. Dla jakich wartości liczby n suma kolejnych początkowych wyrazów ciągu jest większa od 190?

Uzupełnij rozwiązanie zadania, wpisując odpowiednie liczby.

$$a_1 = \boxed{}$$

$$a_2 = \boxed{}$$

$$r = \boxed{}$$

$$S_n = \frac{1+1+(n-1) \cdot 4}{2} \cdot n = \boxed{} \cdot n^2 - n$$

$$2n^2 - n > 190$$

$$2n^2 - n - \boxed{} > 0$$

$$\Delta = \boxed{}$$

$$n = -9,5 \text{ lub } n = \boxed{}$$

$$n = (-\infty; -9,5) \cup (\boxed{}; \infty) \text{ i } n \in \mathbb{N}_+$$

$$\text{Odpowiedź: } n = \boxed{}, 12, 13, \dots$$

Ćwiczenie 6



Znajdź taką liczbę m , dla której liczby x, y, z , w tej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny.

$$\begin{cases} x + y + mz = 18 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Wpisz prawidłowe liczby.

$$\text{Odpowiedź: } m = \boxed{} \text{ dla } x = \boxed{}, y = \boxed{}, z = \boxed{}.$$

Ćwiczenie 7



Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) taki, że $a_1 = \log_4 \sqrt{x}$, $a_2 = 1 + \log_4 x$, $a_3 = 0,5 + \log_4 x^3$, gdzie $x > 0$.

Wyznacz liczbę y taką, że $a_1 + a_2 + \dots + y = 105$, gdzie lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 8



Suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa pierwiastkowi równania $(0, 2)^{4-3x} = 5^{2x+1}$. Czwarty wyraz ciągu jest równy $\frac{5}{4}$. Znajdź wyraz ogólny ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- powtarza i rozwija umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych
- stosuje w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym
- buduje model matematyczny problemu związanego z zastosowaniem sumy wyrazów ciągu arytmetycznego w rozwiązywaniu równań i nierówności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rybki w akwariu
- praca z ekspertem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. W domu wybrana grupa uczniów – ekspertów – miała za zadanie przygotowanie mini wystąpień mających na celu przypomnienie wzorów, twierdzeń związanych z ciągiem arytmetycznym.
2. Początek zajęć jest prowadzony metodą „rybki w akwariu”. Uczniowie przysłuchują się dyskusji (wzbogaconej prezentacjami) prowadzonej przez uczniów – ekspertów, przypominającej najważniejsze sposoby rozwiązywania zadań związanych z ciągiem arytmetycznym.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Pod kierunkiem ekspertów zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz z animacją i rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
2. Podsumowaniem tej części zajęć jest opracowanie i rozwiązanie przez każdą grupę zadania pokazującego zastosowanie wiadomości związanych z ciągiem arytmetycznym w rozwiązywaniu równań, nierówności lub układów równań.
3. Każda z grup prezentuje swoje zadanie na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Eksperti omawiają pracę grup, którymi kierowali, wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem ucznia jest wymyślenie i rozwiązanie zadania tekstowego związanego z rozwiązywaniem układu równań z wykorzystaniem ciągu arytmetycznego.

Materiały pomocnicze:

[Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać w tematach związanych z sumą ciągu arytmetycznego.