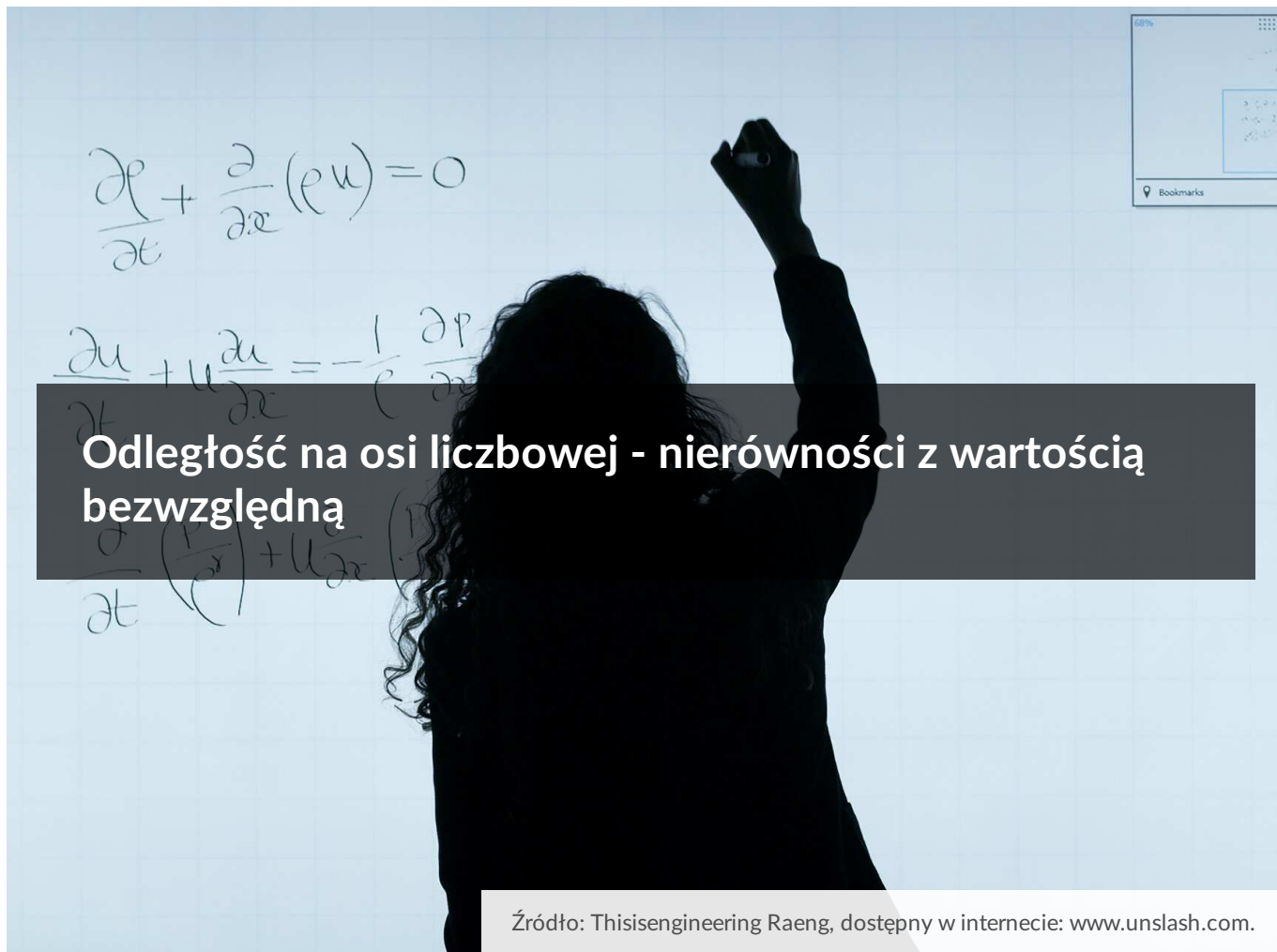




Odległość na osi liczbowej - nierówności z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale pokażemy sposoby rozwiązywania zadań odwołujących się do odległości na osi liczbowej. Każde z tych zadań można też rozwiązać, zapisując ich interpretację algebraiczną, czyli odpowiednią nierówność z wartością bezwzględną.

Zaprezentujemy sposoby rozwiązywania typowych nierówności z wartością bezwzględną, m.in. odwołując się do definicji i własności wartości bezwzględnej, jak również stosując twierdzenie o nierówności trójkąta.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania dotyczące odległości liczb na osi liczbowej, które prowadzą do nierówności z wartością bezwzględną.
- Rozwiążesz typowe nierówności z jedną niewiadomą, wykorzystując do tego własności wartości bezwzględnej.
- Zastosujesz nierówność trójkąta do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Przegląd przykładowych zadań rozpoczniemy od interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

Przykład 1

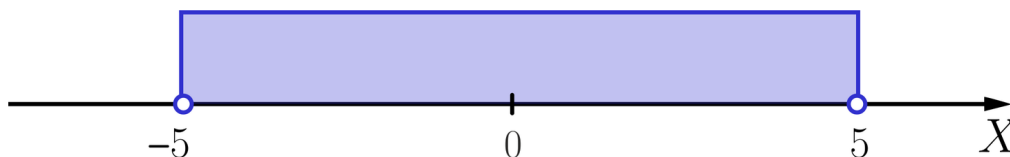
Znajdziemy wszystkie liczby x , które spełniają nierówność $|x| < 5$.

Rozwiązanie:

I sposób:

Mamy znaleźć wszystkie liczby x , które – zgodnie z definicją [wartości bezwzględnej](#) – są odległe od zera o mniej niż 5 jednostek.

Ponieważ $|x| = 5$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -5$ lub $x = 5$, więc po zaznaczeniu na osi liczbowej tych dwóch liczb znajdujemy przedział, w którym są wszystkie liczby spełniające daną nierówność.



A zatem zbiór wszystkich szukanych liczb x tworzy przedział otwarty $(-5, 5)$.

II sposób:

Rozpatrzmy dwa rozłączne przypadki:

1. $x < 0$; wtedy $|x| = -x$, zatem dana nierówność jest równoważna nierówności $-x < 5$, skąd $x > -5$.

Oznacza to, że daną nierówność spełniają wszystkie liczby $x \in (-5, 0)$.

2. $x \geq 0$;

wtedy $|x| = x$, więc dana nierówność jest równoważna nierówności $x < 5$.

Oznacza to, że daną nierówność spełniają wszystkie liczby $x \in \langle 0, 5 \rangle$.

Wynika stąd, że $x \in (-5, 0) \cup \langle 0, 5 \rangle$, czyli $x \in (-5, 5)$.

Odpowiedź: $x \in (-5, 5)$.

Przykład 2

Znajdziemy wszystkie liczby x , które spełniają nierówność $|x + 3| \geq 4$.

Rozwiązanie:

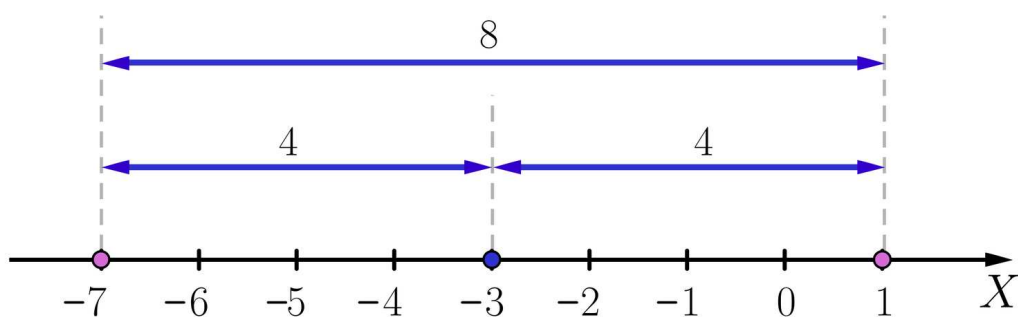
I sposób:

Zapisujemy daną nierówność w postaci $|x - (-3)| \geq 4$.

Szukamy zatem wszystkich liczb x , które są odległe od liczby -3 o co najmniej 4 jednostki.

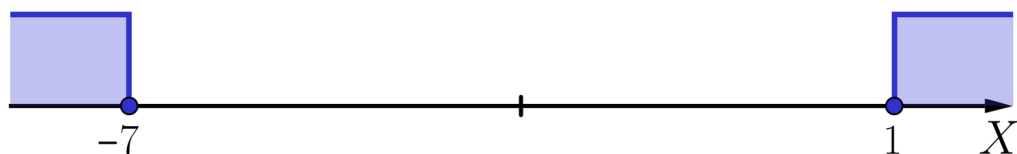
Zaznaczmy na osi liczbowej odcinek o środku w punkcie -3 i długości 8.

Ma on końce w punktach -7 oraz 1 .



Te końce, to takie dwie liczby na osi liczbowej, które są odległe od -3 o 4 jednostki, czyli są to rozwiązania równania $|x + 3| = 4$.

Pozostaje nam zaznaczyć na osi liczbowej dwa rozłączne przedziały, w których są liczby spełniające daną nierówność.



A zatem zbiór wszystkich szukanych liczb x to suma dwóch przedziałów: $(-\infty, -7)$ oraz $\langle 1, \infty)$.

II sposób:

Rozpatrzmy dwa rozłączne przypadki:

1. $x < -3$; wtedy $|x + 3| = -3 - x$, więc dana nierówność jest równoważna nierówności

$$-x - 3 \geq 4, \text{ skąd } -x \geq 7, \text{ czyli } x \leq -7.$$

Oznacza to, że daną nierówność spełniają wszystkie liczby $x \in (-\infty, -7)$.

2. $x \geq -3$;

wtedy $|x + 3| = x + 3$, więc dana nierówność jest równoważna nierówności $x + 3 \geq 4$, skąd $x \geq 1$.

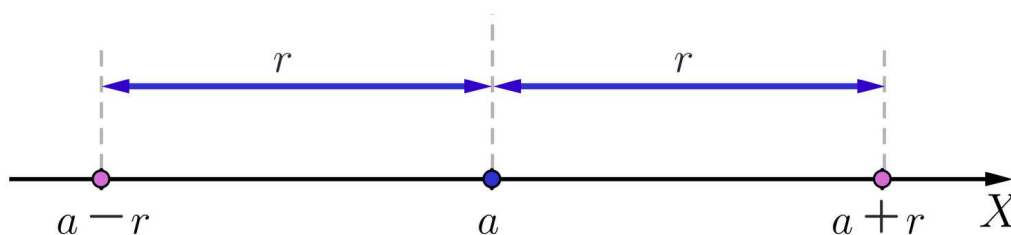
Oznacza to, że daną nierówność spełniają wszystkie liczby $x \in \langle 1, \infty)$.

Wynika stąd, że $x \in (-\infty, -7)$ lub $x \in \langle 1, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -7) \cup \langle 1, \infty)$.

Ważne!

Zauważmy, że dla danej liczby rzeczywistej a i dodatniej liczby $r \geq 0$ rozwiązaniem równania $|x - a| = r$ są liczby $a - r$ oraz $a + r$, leżące na osi liczbowej w odległości r od liczby a .

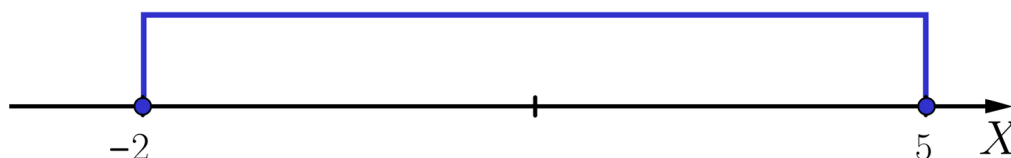


Zatem dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

- $|x - a| \leq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geq a - r$ i $x \leq a + r$, czyli gdy $x \in \langle a - r, a + r \rangle$,
- $|x - a| \geq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$, czyli gdy $x \in (-\infty, a - r) \cup \langle a + r, \infty)$.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , które spełniają nierówność $|x - n| \leq k$.



Obliczymy wartości n oraz k .

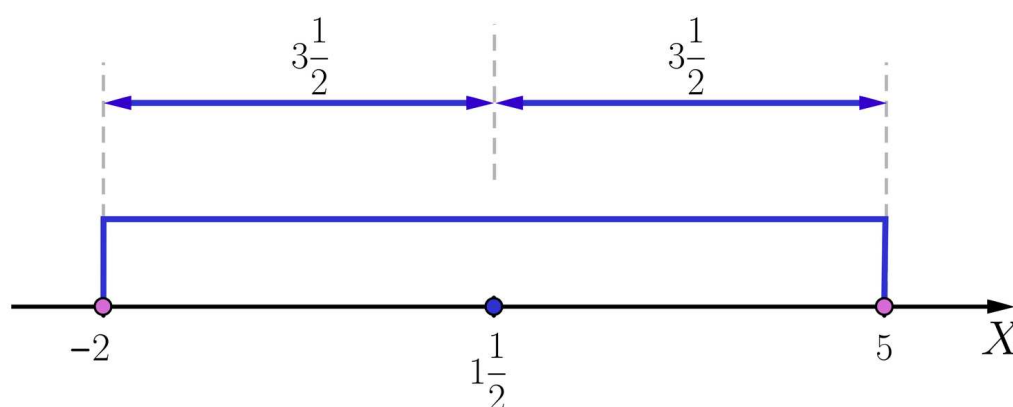
Rozwiązanie:

I sposób:

Zauważmy, że:

- n jest środkiem przedziału $\langle -2, 5 \rangle$, co oznacza, że $n = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$,
- odległość między końcami przedziału $\langle -2, 5 \rangle$ (czyli długość tego przedziału) jest równa $2k$, skąd wynika, że $k = \frac{|5-(-2)|}{2} = \frac{7}{2}$.

Wobec tego $n = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ oraz $k = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.



II sposób:

Skorzystamy z wniosku zapisanego pod poprzednim przykładem.

Ponieważ wszystkie liczby x , które spełniają nierówność $|x - n| \leq k$ to liczby, które należą do przedziału $\langle n - k, n + k \rangle$, więc $n - k = -2$ oraz $n + k = 5$.

Stąd $2k = 2 + 5 = 7$ oraz $2n = 5 - 2 = 3$, czyli $n = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ oraz $k = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Wykazaliśmy zatem, że liczby z przedziału $\langle -2, 5 \rangle$ są rozwiązaniem nierówności $|x - 1\frac{1}{2}| \leq 3\frac{1}{2}$.

Przy okazji zauważmy, że ponieważ

$$|x - 1\frac{1}{2}| = |\frac{1}{2}(2x - 3)| = |\frac{1}{2}| \cdot |2x - 3| = \frac{1}{2} \cdot |2x - 3|,$$

więc nierówność $|x - 1\frac{1}{2}| \leq 3\frac{1}{2}$ można zapisać równoważnie w postaci $|2x - 3| \leq 7$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówności:

a. $||x - 5| - 4| \leq 3,$

b. $||x + 2| - 4| \geq 6$.

Rozwiązanie

a. $||x - 5| - 4| \leq 3$

Przekształcamy daną nierówność równoważnie, korzystając z omówionych powyżej własności nierówności z **wartością bezwzględną**: $||x - 5| - 4| \leq 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - 5| \in \langle 4 - 3, 4 + 3 \rangle$, czyli $|x - 5| \in \langle 1, 7 \rangle$, co oznacza, że $|x - 5| \geq 1$ i $|x - 5| \leq 7$. Rozwiązujemy otrzymane w ten sposób nierówności:

$|x - 5| \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 5 - 1) \cup \langle 5 + 1, \infty)$, czyli dla $x \in (-\infty, 4) \cup \langle 6, \infty)$,

$|x - 5| \leq 7$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \langle 5 - 7, 5 + 7 \rangle$, czyli dla $x \in \langle -2, 12 \rangle$.

Na koniec sprawdzamy, że układ (koniunkcja) dwóch otrzymanych warunków: $x \in (-\infty, 4) \cup \langle 6, \infty)$ oraz $x \in \langle -2, 12 \rangle$ jest spełniony dla $x \in \langle -2, 4) \cup \langle 6, 12 \rangle$.

Otrzymujemy więc, że rozwiązaniami danej nierówności są liczby $x \in \langle -2, 4) \cup \langle 6, 12 \rangle$.

b. $||x + 2| - 4| \geq 6$

Przekształcamy daną nierówność równoważnie, korzystając z omówionych powyżej własności nierówności z **wartością bezwzględną**:

$||x + 2| - 4| \geq 6$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x + 2| \leq 4 - 6 = -2$ lub $|x + 2| \geq 4 + 6 = 10$.

Pierwsza z otrzymanych nierówności jest sprzeczna (a to dlatego, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x + 2| \geq 0$), więc pozostaje rozwiązać drugą nierówność:

$|x + 2| \geq 10$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq -2 - 10 = -12$ lub $x \geq -2 + 10 = 8$.

Oznacza to, że rozwiązaniami danej nierówności są liczby $x \in (-\infty, -12) \cup \langle 8, \infty)$.

Przykład 5

Znajdziemy wszystkie liczby x , które spełniają nierówność:

a. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 16x + 64} < 10$,

b. $|x - 5| + |x + 10| < |3x + 30|$.

Rozwiązanie

a. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 16x + 64} < 10$

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwe są zależności:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$$

$$\text{oraz } \sqrt{x^2 + 16x + 64} = \sqrt{(x + 8)^2} = |x + 8|,$$

więc dana nierówność jest równoważna nierówności

$$|x - 3| + |x + 8| < 10.$$

Zauważmy, że liczba x spełnia nierówność $|x - 3| + |x + 8| < 10$

wtedy i tylko wtedy, gdy na **osi liczbowej** suma odległości x od liczb 3 oraz -8 jest mniejsza od 10.

Jednakże odległość między 3 i -8 jest równa 11, a więc suma $|x - 3| + |x + 8|$ jest większa lub równa 11.

To spostrzeżenie możemy potwierdzić, korzystając z **nierówności trójkąta**. Na tej podstawie stwierdzamy, że

$$|x - 3| + |x + 8| = |3 - x| + |x + 8| \geq |3 - x + x + 8| = |11| = 11$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Oznacza to, że dana nierówność nie ma rozwiązań.

b. $|x - 5| + |x + 10| < |3x + 30|$

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest zależność

$|3x + 30| = 3 \cdot |x + 10|$, więc daną nierówność możemy przekształcić równoważnie do postaci

$$|x - 5| + |x + 10| < 3|x + 10|,$$

$$\text{czyli } |x - 5| < 2|x + 10|.$$

Rozpatrzmy na **osi liczbowej** trzy przedziały:

$$(-\infty, -10), \langle -10, 5 \rangle \text{ oraz } \langle 5, +\infty \rangle.$$

Otrzymujemy następujące przypadki:

1. $x \in (-\infty, -10)$;

$$\text{wtedy } 2|x + 10| = 2(-x - 10) = -2x - 20 \text{ oraz } |x - 5| = -x + 5,$$

2. $x \in \langle -10, 5 \rangle$;

$$\text{wtedy } 2|x + 10| = 2(x + 10) = 2x + 20 \text{ oraz } |x - 5| = -x + 5,$$

3. $x \in \langle 5, +\infty \rangle$;

$$\text{wtedy } 2|x + 10| = 2(x + 10) = 2x + 20 \text{ oraz } |x - 5| = x - 5.$$

Wówczas:

- o w przypadku pierwszym otrzymujemy nierówność

$$-x + 5 < -2x - 20, \text{ skąd } x < -25.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in (-\infty, -10)$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in (-\infty, -25)$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in (-\infty, -25)$.

- o w przypadku drugim otrzymujemy nierówność

$$-x + 5 < 2x + 20, \text{ skąd } -15 < 3x, \text{ czyli } x > -5.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in \langle -10, 5 \rangle$ oraz

otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in (-5, +\infty)$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in (-5, 5)$.

- o w przypadku trzecim otrzymujemy nierówność

$$x - 5 < 2x + 20,$$

$$\text{skąd } -5 - 20 < 2x - x,$$

$$\text{czyli } x > -25.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in \langle 5, +\infty)$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in (-25, +\infty)$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in \langle 5, +\infty)$.

Sumując przedziały otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków, rozwiązaniami danej nierówności są $x \in (-\infty, -25) \cup (-5, 5) \cup \langle 5, +\infty)$, czyli $x \in (-\infty, -25) \cup (-5, +\infty)$.

Przy okazji zauważmy, że:

- o bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że odległość na [osi liczbowej](#) każdej z liczb -25 oraz -5 od 5 jest 2 razy większa niż odległość od -10 ,
- o liczba x spełnia nierówność $|x - 5| < 2|x + 10|$ wtedy i tylko wtedy, gdy na [osi liczbowej](#) odległość x od 5 jest mniejsza od podwojonej odległości x od -10 .
- o analizując położenie x na [osi liczbowej](#) względem liczb -25 oraz -5 , można następnie wywnioskować, że powyższy warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -25) \cup (-5, +\infty)$.

Przykład 6

Rozwiążemy nierówność

a. $|x + 4| + |3x - 6| \leq 8,$

b. $|x + 1| - |x - 5| \geq x - 3.$

Rozwiązanie

a. $|x + 4| + |3x - 6| \leq 8$

Korzystając z definicji [wartości bezwzględnej](#), otrzymujemy:

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{dla } x \geq -4 \\ -x - 4, & \text{dla } x < -4 \end{cases}$$

oraz

$$|3x - 6| = 3|x - 2| = \begin{cases} 3(x - 2), & \text{dla } x \geq 2 \\ -3(x - 2), & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

Rozpatrujemy zatem na [osi liczbowej](#) trzy przedziały:

$$(-\infty, -4), \langle -4, 2) \text{ oraz } \langle 2, +\infty).$$

Otrzymujemy więc trzy następujące przypadki:

1. $x \in (-\infty, -4)$; wtedy $|x + 4| = -x - 4$ oraz
 $|3x - 6| = 3|x - 2| = -3(x - 2) = -3x + 6$,
2. $x \in \langle -4, 2 \rangle$; wtedy $|x + 4| = x + 4$ oraz
 $|3x - 6| = 3|x - 2| = -3(x - 2) = -3x + 6$,
3. $x \in \langle 2, +\infty \rangle$; wtedy $|x + 4| = x + 4$ oraz
 $|3x - 6| = 3|x - 2| = 3(x - 2) = 3x - 6$.

Wobec tego:

$$x + 4 + 3x - 6 \leq 8,$$

$$\text{skąd } x + 3x \leq 8 - 4 + 6, 4x \leq 10,$$

$$\text{czyli } x \leq \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in \langle 2, +\infty \rangle$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \leq \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in \langle 2, 2\frac{1}{2} \rangle$.

b. $|x + 1| - |x - 5| \geq x - 3$.

Korzystając z definicji [wartości bezwzględnej](#), otrzymujemy:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{dla } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{dla } x < -1 \end{cases}$$

oraz

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{dla } x \geq 5 \\ -x + 5, & \text{dla } x < 5 \end{cases}$$

Wobec tego rozpatrujemy na [osi liczbowej](#) trzy przedziały:

$(-\infty, -1)$, $\langle -1, 5 \rangle$ oraz $\langle 5, +\infty \rangle$.

Otrzymujemy trzy następujące przypadki:

1. $x \in (-\infty, -1)$; wtedy $|x + 1| = -x - 1$ oraz $|x - 5| = -x + 5$,
2. $x \in \langle -1, 5 \rangle$; wtedy $|x + 1| = x + 1$ oraz $|x - 5| = -x + 5$,
3. $x \in \langle 5, +\infty \rangle$; wtedy $|x + 1| = x + 1$ oraz $|x - 5| = x - 5$.

Wynika stąd, że:

- w przypadku pierwszym otrzymujemy nierówność

$$-x - 1 - (-x + 5) \geq x - 3,$$

$$\text{skąd } -x - 1 + x - 5 \geq x - 3,$$

$$-1 - 5 + 3 \geq x,$$

$$\text{czyli } x \leq -3.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in (-\infty, -1)$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in (-\infty, -3)$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in (-\infty, -3)$.

- w przypadku drugim otrzymujemy nierówność

$$x + 1 - (-x + 5) \geq x - 3,$$

$$x + 1 + x - 5 \geq x - 3,$$

$$\text{skąd } x \geq -3 - 1 + 5,$$

$$\text{czyli } x \geq 1.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in \langle -1, 5 \rangle$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in \langle 1, 5 \rangle$.

- o w przypadku trzecim otrzymujemy nierówność

$$x + 1 - (x - 5) \geq x - 3,$$

$$\text{skąd } x + 1 - x + 5 \geq x - 3,$$

$$1 + 5 + 3 \geq x,$$

$$\text{czyli } x \leq 9.$$

Bierzemy część wspólną założonego przedziału: $x \in \langle 5, +\infty \rangle$ oraz otrzymanego zbioru rozwiązań: $x \in (-\infty, 9)$ i otrzymujemy, że w tym przypadku rozwiązaniami nierówności są $x \in \langle 5, 9 \rangle$.

Sumując przedziały otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków, dostajemy, że rozwiązania danego równania to $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, 5 \rangle \cup \langle 5, 9 \rangle$, czyli $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, 9 \rangle$.

Słownik

oś liczbowa

prosta, na której wyróżniono zwrot i punkt O zwany zerowym oraz ustalono odcinek jednostkowy

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy jej odległość na osi liczbowej od zera; wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$

nierówność trójkąta

dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

przy czym równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Odległość na osi liczbowej. Nierówności z wartością bezwzględną

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, które spełniają nierówność zapisaną z użyciem wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania nierówności z wykorzystaniem definicji i własności wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną z wykorzystaniem nierówności trójkąta.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni
wynik:

–



Uruchom

Polecenie 2

Wskaż liczbę, która spełnia nierówność $|3x^2 - 12| \leq x + 1$.

☐ -1

☐ $\frac{1}{2}$

☐ -2

☐ 2

Polecenie 3

Ułóż po jednym zadaniu dotyczącym:

- wyznaczania wszystkich liczb na osi liczbowej, które spełniają nierówność zapisaną z użyciem wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania nierówności z wykorzystaniem definicji i własności wartości bezwzględnej,
- rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną z wykorzystaniem nierówności trójkąta.

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami.

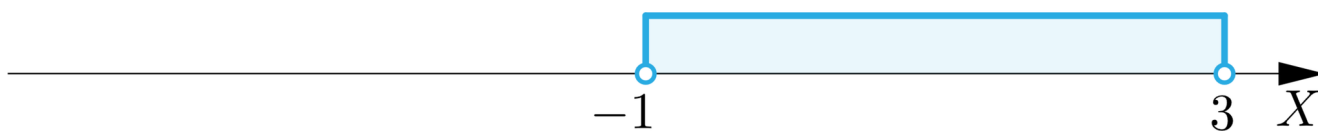
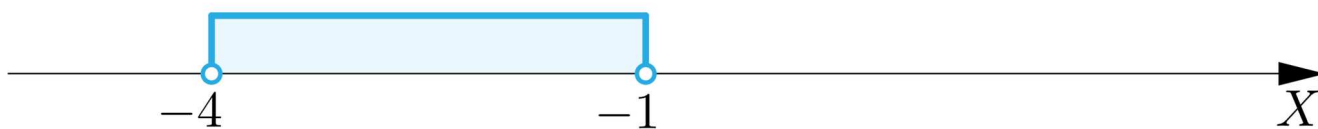
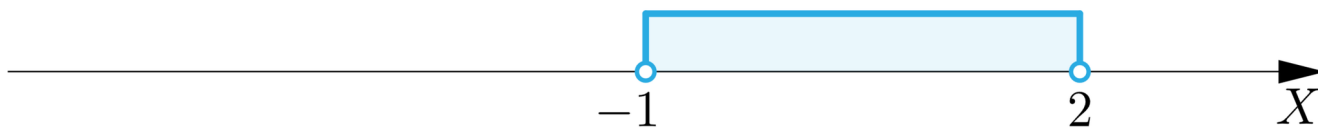
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x odległych od -1 o mniej niż 3 .

☐☐☐☐

Ćwiczenie 2



Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $|2x - 3| \leq 17$.

☐ $x \in (-7, 10)$

☐ $x \in (-\infty, -7) \cup (10, +\infty)$

☐ $x \in \langle -7, 10 \rangle$

☐ $x \in (-\infty, -7) \cup (10, +\infty)$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż nierówność $|2x - 5| \leq |x + 8|$.

Przeciągnij odpowiednie symbole tak, aby poniżej pojawił się zapis rozwiązania danej nierówności.

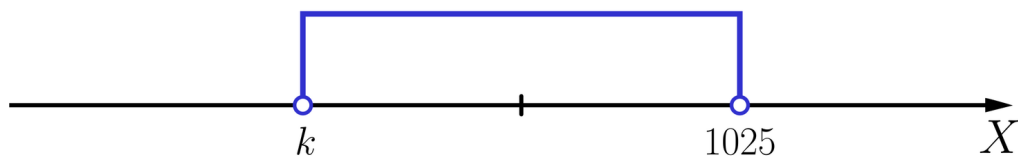
Odpowiedź: $x \in$

$+\infty$ 13 $($ $-\infty$ -1 $)$ $\langle$ $\rangle$ 1 -13

Ćwiczenie 4



Poniższy rysunek przedstawia zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają nierówność $|3x - n| < 1410$.



Oblicz n oraz k .

Odpowiedź: $n =$, $k =$.

Ćwiczenie 5



Rozpatrzmy nierówność

$$|x - 12| - |x + 5| \leq 7 - x.$$

Oznaczmy przez:

m – największą ujemną liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność,

k – największą dodatnią liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność.

Oblicz $|k \cdot m|$. Zakoduj poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jednostki otrzymanego wyniku.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Spośród podanych poniżej wybierz i zaznacz te wartości parametru m , dla których nierówność

$$|3x - 8| + |2x - 9| + |5x + 10| \geq m$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

☐ $m = 29$

☐ $m = 31$

☐ $m = 27$

☐ $m = 25$

Ćwiczenie 8



Rozpatrzmy nierówność

$$|x - 125| + |x + 238| < 501.$$

Oznaczmy przez:

k – najmniejszą liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność,

n – największą liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność.

Wówczas:

☐ $2n + k = 80$

☐ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b , dla których zachodzi równość
 $ak + bn = 47$

☐ $n - k = 501$

☐ $|k| + |n| = 499$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość na osi liczbowej - nierówności z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną o stopniu trudności nie większym niż: $2|x + 3| + 3|x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2|x - 3| < 11$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące odległości liczb na osi liczbowej, które prowadzą do nierówności z wartością bezwzględną;
- rozwiązuje nierówności z jedną niewiadomą, wykorzystując do tego własności wartości bezwzględnej;
- stosuje nierówność trójkąta do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego,
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje uczniom temat lekcji oraz określa cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kota i myszy rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.
- Każdy z uczniów samodzielnie rozwiązuje test samosprawdzający. Nauczyciel może wystawić oceny.
- Uczniowie dyskutują na temat napotkanych trudności podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Faza podsumowująca:

- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte podczas nich umiejętności.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują polecenia w sekcji „Testy samosprawdzające”.

Materiały pomocnicze:

- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Odległość na osi liczbowej](#)

Wskazówki metodyczne:

„Testy samosprawdzające” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału przed sprawdzianem. Nauczyciel może wykorzystać testy podczas lekcji o odległości liczb na osi liczbowej lub podczas lekcji - nierówności z wartością bezwzględną.