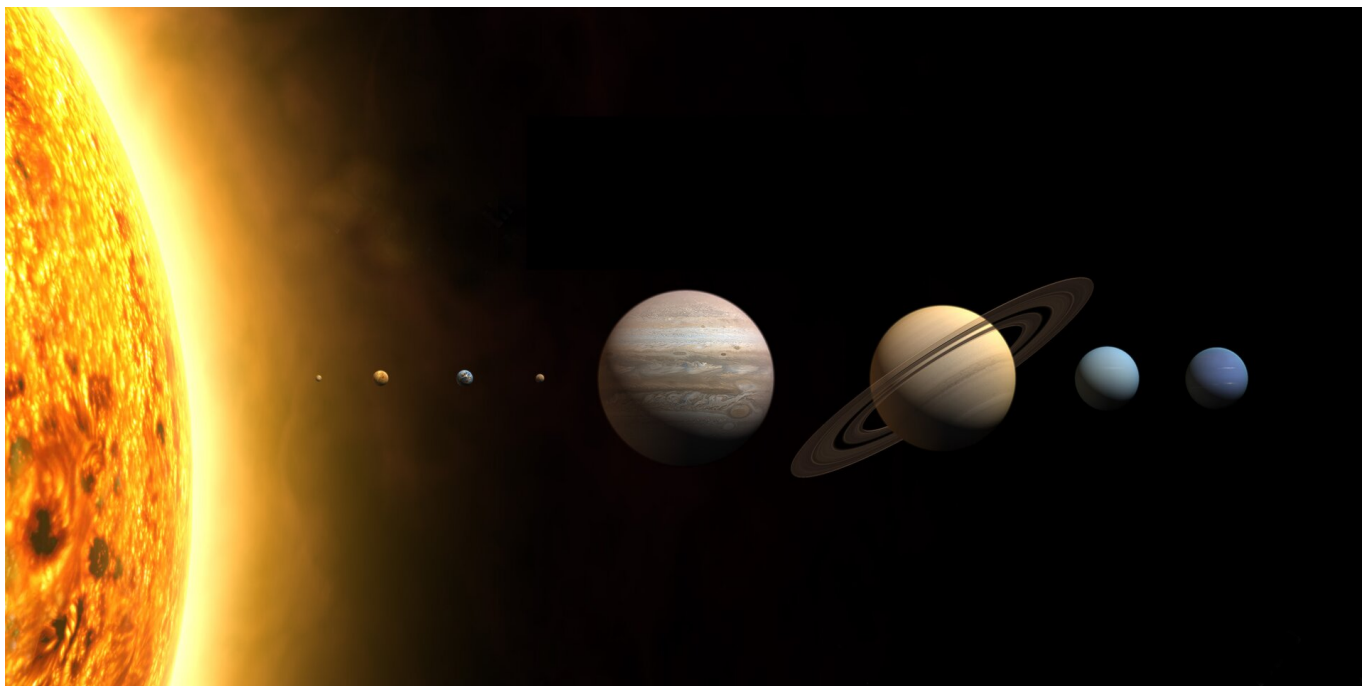




Co mówi III prawo Keplera?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Grafika interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Co mówi III prawo Keplera?

Źródło: dostępny w internecie: https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia12114_0.jpg [dostęp 4.05.2022], domena publiczna.

Czy to nie ciekawe ?

Johannes Kepler był niemieckim uczonym żyjącym na przełomie XVI i XVII wieku. Dzięki analizie wieloletnich obserwacji duńskiego astronoma - Tycho Brahe - sformułował on trzy prawa, które opisują ruch ciał Układu Słonecznego. Jak później się okazało, opisują również ruch obiektów każdego innego układu planetarnego. Pierwsze dwa prawa opisują ruch ciała-planety wokół Słońca. Trzecie prawo odnosi się do zależności w ruchu kilku ciał wokół masy centralnej. Kepler dokonał analizy ruchu planet w oparciu o dane obserwacyjne, nie znając jeszcze prawa grawitacji (Newton urodził się prawie sto lat później).

Twoje cele

W tym materiale:

- poznasz definicję trzeciego prawa Keplera,
- zrozumiesz, jaka jest zależność pomiędzy rozmiarami orbit planet a ich okresami obiegu w tym samym układzie planetarnym,
- wyznacysz stałą opisującą III prawo Keplera dla Układu Słonecznego,
- zauważysz związek pomiędzy obserwowanym ruchem planet a prawem powszechnego ciążenia.

Warto przeczytać



Rys. 1. Porter Kelper, autor nieznany, 1610.

Źródło: dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johannes_Kepler_1610.jpg [dostęp 4.05.2022], domena publiczna.

Kepler, jako wybitny matematyk, był cenionym uczonym. Był zwolennikiem [teorii Kopernika](#), co w tamtych czasach nie było powszechne. Bardzo dokładnie analizował dane obserwacyjne zbierane przez lata przez duńskiego astronoma Tycho Brahe - jednego z jednego z najwybitniejszych obserwatorów nocnego nieba tamtych czasów - Tycho Brahe. Dzięki wielkiej bazie pomiarów położenia planet na niebie mógł wyznaczyć zależności pomiędzy parametrami charakteryzującymi planetę. Na mocy pierwszych dwóch praw dokładnie określił kształt orbit planet. Następnie porównał średnie odległości z czasem obiegu planet wokół Słońca. W ten sposób sformułował prawo, określające zależność pomiędzy okresem obiegu planet a ich odległościami w Układzie Słonecznym.

III prawo Kelpera

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciastu wielkiej półosi jej orbity (czyli średniej odległości od Słońca) jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Kepler w tamtym czasie wiedział, że stosunek ten jest taki sam dla wszystkich planet, ale nie było jeszcze wtedy wiadomo, dlaczego tak się dzieje. Natomiast dzięki rozwojowi nauki, przede wszystkim odkryciu prawa grawitacji, wiadomo, że stała ta ma postać:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}},$$

czyli zależy od stałej grawitacji G oraz masy Słońca. Dzięki temu prawu znając jedynie wielką półś orbitę planety oraz jej okres bez problemu możemy wyznaczyć masę gwiazdy centralnej z bardzo dobrym przybliżeniem.

Wykorzystując prawo powszechnego ciążenia oraz wiedzę na temat ruchu planet wokół Słońca, można zapisać uogólnione III prawo Keplera w postaci:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\odot} + m)},$$

gdzie $M_{\odot}$ to masa Słońca, m – masa planety, G – stała grawitacji.

Ponieważ masa planety jest znikomo mała w porównaniu z masą Słońca ($m < M_{\odot}$), często pomija się ją w obliczeniach, dostając postać zapisaną powyżej jako podstawowe III prawo Keplera. Natomiast nie do przecenienia jest rola, jaką uogólnione III prawo Keplera odgrywa w astrofizyce – to dzięki niemu, obserwując i analizując wzajemny ruch składników w układach podwójnych gwiazd oraz pozasłonecznych układach planetarnych mamy możliwość wyznaczania mas odległych obiektów.

Odkrycie prawa powszechnej grawitacji pozwoliło wyznaczyć stałą dla każdego układu planetarnego, w szczególności Układu Słonecznego. Wiedząc, że:

- masa Słońca: $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg,
- stała grawitacji: $G = 6,67430(15) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$,

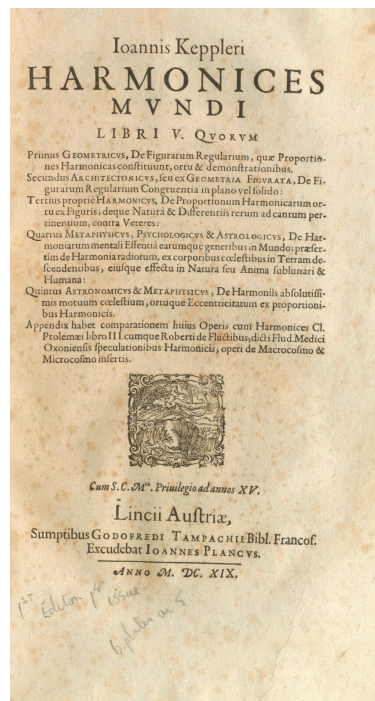
dostajemy wartość stałej w uogólnionym III prawie Keplera równą $3,3626 \cdot 10^{18}$ w Układzie Słonecznym. Dzięki temu możemy, na przykład, wyznaczyć wielką półś orbitę planety na podstawie okresu jej obiegu. Dziś już wiadomo, że prawo to jest słuszne w każdym układzie planetarnym.

Planeta	Średnia odległość do Słońca (AU)	Okres obiegu (dni)	$\frac{a^3}{T^2} \cdot 10^{-6} \left(\frac{AU^3}{dni^2} \right)$
Merkury	0.389	87.77	7.64
Wenus	0.724	224.70	7.52

Ziemia	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jowisz	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

Tab. 1. Dane użyte przez Keplera (1618).

W Tab. 1. przedstawiono dane, którymi posługiwał się Kepler oraz w ostatniej kolumnie prawie stałą wartość wiążącą okres obiegu z odległością planety od Słońca. Po odkryciu tego wzorca Kepler napisał: *Wydawało mi się, że śnię... Ale jest absolutnie pewne i dokładne, że stosunek, który istnieje między okresami dowolnych dwóch planet, jest dokładnie stosunkiem $3/2$ potęgi ich średniej odległości od Słońca* (J. Kepler, Harmonices Mundi, 1619).



Rys. 2. W ostatnim rozdziale książki "Harmonie świata" Kepler opisał swoje trzecie prawo.

Źródło: dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonices_Mundi_0001-lg.jpg [dostęp 4.05.2022], domena publiczna.

Kepler potrafił w swoich czasach stwierdzić jedynie, że stosunki sześciannu wielkiej półosi do kwadratu okresu obiegu dla każdej planety są stałe. Nie była wtedy znana wartość stałej G i nie była znana masa Słońca. Dzięki odkryciu tego prawa przez Keplera, Newton mógł potwierdzić swoje przypuszczenia, że siła grawitacji jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości oddziałujących ciał i sformułować prawo powszechnej grawitacji. Więcej o zależności III prawa Keplera i prawa powszechnego ciążenia dowiesz się w e-materiale pt. „Jaki jest związek między III prawem Keplera a prawem powszechnego ciążenia?”.

Słowniczek

teoria heliocentryczna

teoria mówiąca o tym, że wszystkie planety krążą po orbitach wokół Słońca. Sformułowana została przez Mikołaja Kopernika w pierwszej połowie XVI wieku. Wcześniej zakładano, że Ziemia jest centrum wszystkiego – była to teoria geocentryczna.

jednostka astronomiczna

jednostka długości używana do opisu odległości w układach planetarnych. Jedna jednostka astronomiczna (AU) to średnia odległość Ziemi od Słońca. Często przyjmuje się przybliżenie, że $1 \text{ AU} = 150 \text{ mln km}$. Wartość dokładna to $1 \text{ AU} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$

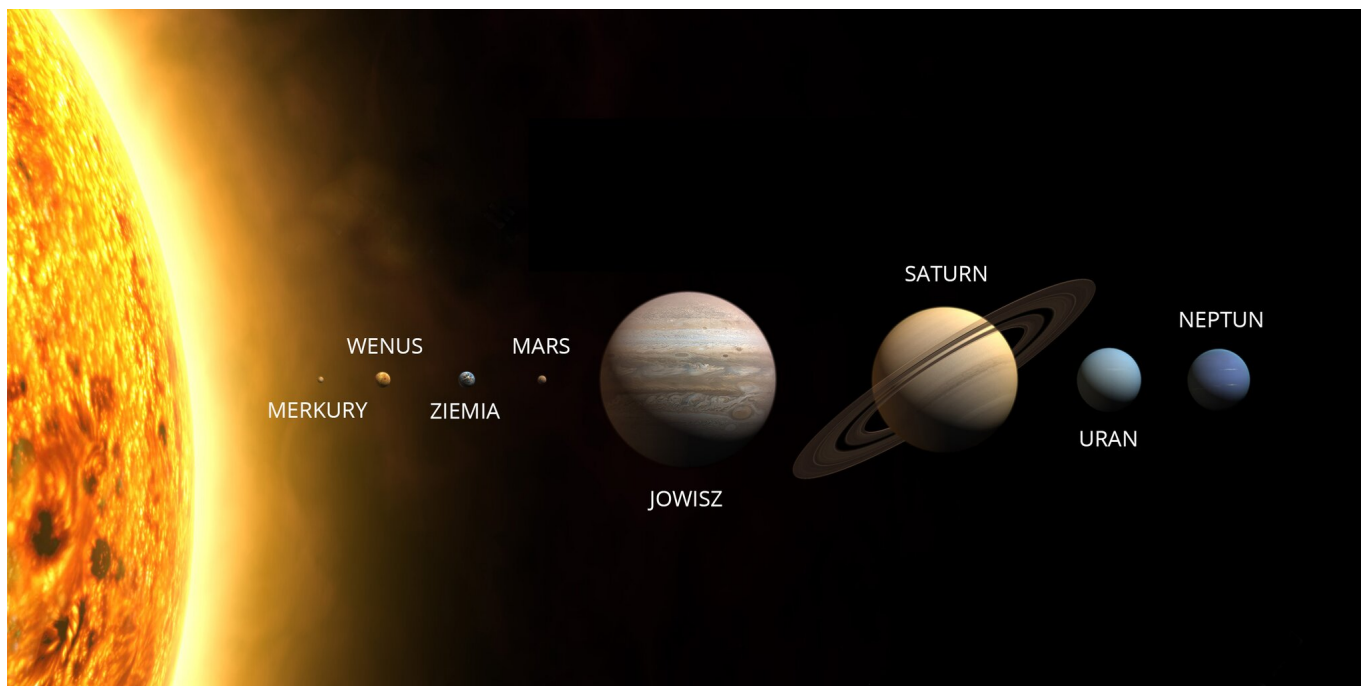
Grafika interaktywna

Co mówi III prawo Keplera?

Polecenie 1

Zapoznaj się z informacjami przedstawionymi na poniższej grafice interaktywnej. Klikając na numerki przyporządkowane planetom zobaczysz

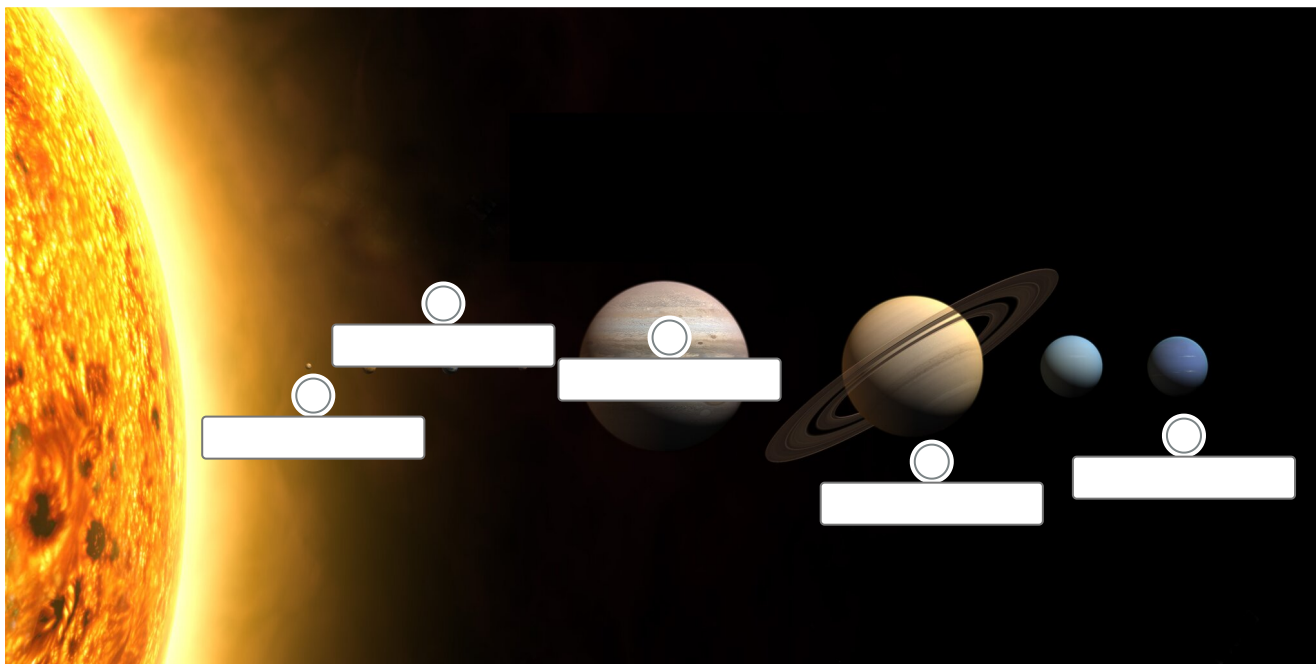
- stałą występującą w III prawie Keplera,
- okres obiegu planety,
- wartość wielkiej półosi orbity tej planety.



Źródło: dostępny w internecie: https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia12114_0.jpg [dostęp 4.05.2022], domena publiczna.

Polecenie 2

Dopasuj podane wielkości do odpowiadających im planet.



$$\frac{T^2}{a^3} = 1,0000$$

$$a = 30,07 \text{ AU}$$

$$a = 9,54 \text{ AU}$$

$$T = 11,86 \text{ lat}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = 1,0497$$

Źródło: dostępny w internecie: https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia12114_0.jpg [dostęp 4.05.2022], domena publiczna.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Co opisuje III prawo Keplera?

- ☐ ruch satelitów wokół Ziemi
- ☐ prędkość danej planety w różnych punktach orbity wokół Słońca
- ☐ zależność pomiędzy okresem obiegu a wielkością orbity
- ☐ kształt orbit planet

Ćwiczenie 2



Jaką postać przyjmuje III prawo Keplera, jeżeli chcemy wyznaczyć dowolną:

- a) wielką półoś orbity,
- b) okres obiegu planety.

Dla uproszczenia przyjmijmy oznaczenie, że stała w III prawie Keplera równa jest $K = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$.

a) wielka półoś orbity =

b) okres obiegu planety =

Ćwiczenie 3



Uzupełnij tabelę wykorzystując III prawo Keplera. Wyniki podaj z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

planeta	Wielka półś [AU]	Okres obiegu [lata ziemskie]
Merkury		0,241
Wenus		0,616
Ziemia	1,000	1,000
Mars	1,524	

Ćwiczenie 4



Uzupełnij tabelę. Za jednostki przyjmij AU dla wielkiej półosi oraz rok ziemski dla okresów. Wyniki podaj z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

planeta	Wielka półś [AU]	Okres obiegu [lata ziemskie]
Jowisz		11,86
Saturn		29,45
Uran	19,19	
Neptun	30,07	

Ćwiczenie 5



Wyznacz wielką półś orbity komety Hale'a-Boppa wiedząc, że okres jej obiegu wokół Słońca to 2456 lat. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych AU.

Wielką półś orbity wynosi: AU.

Ćwiczenie 6



Planeta skalista Mars ma dwa niewielkie księżyce : Fobos i Deimos. Fobos okrąży Marsa po orbicie o wielkiej półosi równej 9375 km, z okresem 0,319 dnia (nieco ponad pół godziny). Wiedząc, że Deimos znajduje się w średniej odległości 23458 km od Marsa, oblicz jego okres obiegu. Wynik podaj w godzinach, minutach.

Okres obiegu wynosi godzin minut.

Ćwiczenie 7



Tak samo jak Ziemia okrąża Słońce, tak też Księżyc okrąża Ziemię. Wyznacz wielką półoś orbity Księżyca w jednostkach astronomicznych z zaokrągleniem do dwóch cyfr znaczących. Przyjmij, że masa Ziemi wynosi $5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, okres obiegu Księżyca wokół niej to 27,3 dnia, a $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$.

Wielką półoś orbity wynosi AU.

Ćwiczenie 8

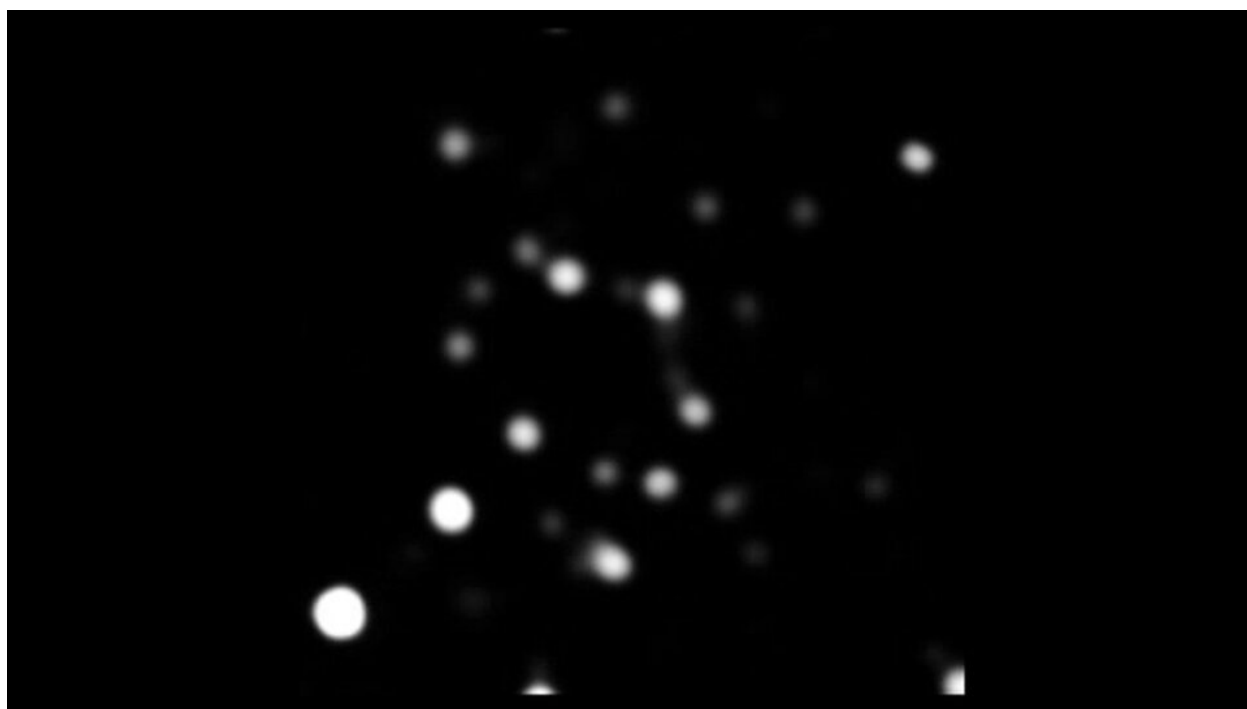


Pewnego satelitę wojskowego wystrzelono na orbitę okołoziemską. Znajduje się on na orbicie o wielkiej półosi równej 23 222 km. Oblicz okres jego obiegu wokół Ziemi w godzinach. Masa Ziemi : $5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$. Wynik zaokrąglaj do całości.

Okres obiegu wynosi h



W centrum naszej galaktyki znajduje się supermasywna czarna dziura Sagittarius A*. Od 1992 roku międzynarodowy zespół naukowy w obserwatorium ESO Very Large Telescope (VLT) w Chile obserwuje gwiazdę S2 krążącą wokół tej czarnej dziury. Spróbuj wypatrzyć na poniższym filmie poklatkowym (łączącym zdjęcia zrobione na przestrzeni kilkunastu lat) tę gwiazdę.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RGv2JvozM7KnX](https://www.eso.org/public/usa/videos/eso0846j/?lang=en)

ESO/ R.Genzel and S. Gillessen

Źródło: <https://www.eso.org/public/usa/videos/eso0846j/?lang=en>, domena publiczna.

Film przedstawia ruchy gwiazd po orbitach eliptycznych wokół czarnej dziury. Na ciemnym tle pokazano jasne punkty poruszające się ruchem eliptycznym w różnych płaszczyznach. Film powstał w oparciu o zdjęcia wykonane na przestrzeni lat, przy pomocy teleskopu umieszczonego w obserwatorium w Chile.

Na pewno udało Ci się zauważyć eliptyczną orbitę tej gwiazdy w centralnej części filmu. Na poniższym rysunku przedstawiono szczegółowe wyniki pomiaru trajektorii gwiazdy S2.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Monika Sitek
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	Jaka jest treść III prawa Keplera?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. IV. Posługiwanie się informacjami pochodzącymi z analizy materiałów źródłowych, w tym tekstów popularnonaukowych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych; 18) przedstawia własnymi słowami główne tezy tekstu popularnonaukowego z dziedziny fizyki lub astronomii. IV. Grawitacja i elementy astronomii. Uczeń: 5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. rozumie zależność w III prawie Keplera; 2. wykorzystuje w obliczeniach III prawo Keplera; 3. analizuje ruch planet w różnych układach na podstawie III prawa Keplera.
Strategie nauczania:	fliped-classroom
Metody nauczania:	burza mózgów, analiza pomysłów
Formy zajęć:	praca w grupach
Środki dydaktyczne:	urządzenie multimedialne z dostępem do Internetu dla grup uczniów
Materiały pomocnicze:	e-materiały : „Zastosowanie praw Keplera w obliczeniach”, „Pierwsze prawo Keplera”, „Jaki jest związek między III prawem Keplera, a prawem powszechnego ciążenia?”, „Jaka jest treść I prawa Keplera?”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Uczniowie zapoznają się z całym e-materiałem samodzielnie w domu. Nauczyciel pyta uczniów, co było niezrozumiałe w e-materiale. Wyjaśnia uczniom wątpliwości. Jeżeli jakiś uczeń zrozumiał bez problemów cały materiał, wyjaśnia kolegom i koleżankom niejasności.	
Faza realizacyjna:	
Nauczyciel dzieli uczniów na grupy po 3 -4 osoby w każdej grupie. Każda grupa dostaje zestaw danych: - informacje o gwiazdzie (kilkudzaniowy tekst) w tym jej masę, promień, odległość od Ziemi, wiek; - wybiórcze informacje o planetach okrążających daną gwiazdę: parametry orbity. Uczniowie w grupach analizują ten układ planetarny. Ich zadaniem jest wyznaczyć na mocy III prawa Keplera okresy obiegu planet. Jeżeli grupa jest złożona z wybitnych uczniów dodatkowo dostają informację (wymyśloną) o księżycu okrążającym jedną lub dwie planety w tym układzie. Na przykład gwiazda podobna do Słońca, wokół której krążą 4 planety, dwie z nich mają księżyce w zadanej odległości od tej planety. Ewentualnie jedna planeta ma 3 księżyce w zadanej odległości.	
Faza podsumowująca:	
Każda grupa prezentuje klasie swój układ planetarny. Może to być w formie krótkiej pogadanki, ale również w postaci plakatu, grafiki lub prezentacji multimedialnej.	

Praca domowa:

W ramach powtórzenia i utrwalenia wiadomości uczniowie rozwiązują zadania: 2, 3, 5, 7 z zestawu ćwiczeń .

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium**

Uczniowie mogą wykorzystać multimedium na lekcji „Zastosowanie praw Keplera w obliczeniach”.