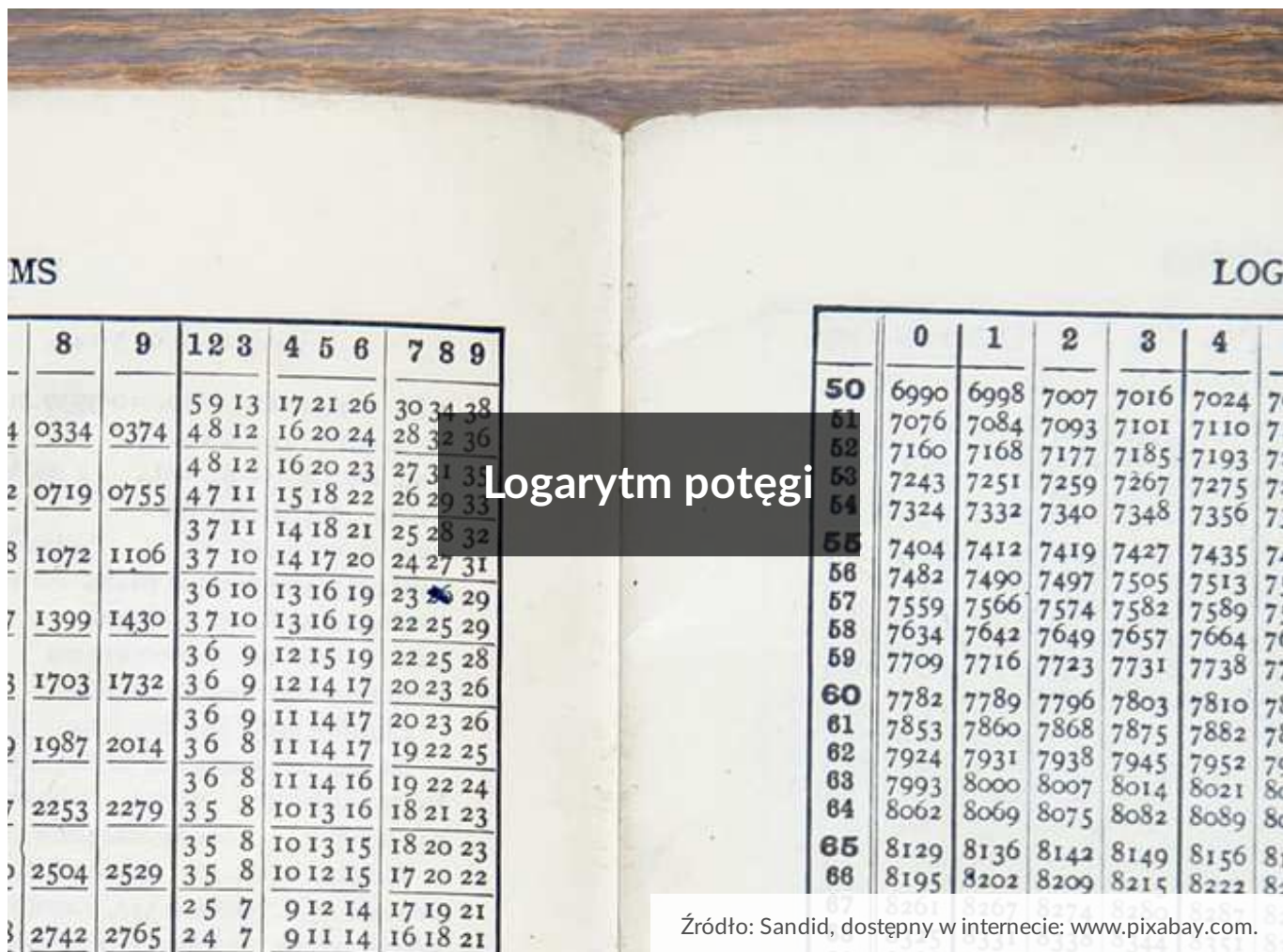




Logarytm potęgi

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jaka jest największa liczba, którą znasz? Przypomnij sobie wszystkie artykuły, informacje, filmy, wiadomości internetowe czy telewizyjne jakie pamiętasz, w których była zamieszczona taka liczba. W jaki sposób była zapisana? Jaką wielkość wyrażała?

Największą liczbą użytą w twierdzeniu matematycznym jest liczba Grahama, nazwana od jej twórcy Ronalda Grahama. Graham wymyślił ją jeszcze na długo przed Twoim urodzeniem, bo w 1971 r.

Liczba ta wiąże się z górnym oszacowaniem rozwiązania jednego z problemów teorii grafów. Jest to tak ogromna liczba (potęga potęgi potęgi potęga ...), że do jej zapisu użyto specjalnej notacji, tzw. notacji strzałkowej (na czym polega ta notacja pozostawiam Twojej dociekliwości). Liczba Grahama zapisana w tej notacji wynosi G_{64} .



W tym materiale niestety nie będziemy zajmować się aż tak dużymi liczbami (i stosować notacji strzałkowej!), ale zapoznamy się z możliwościami zapisu logarytmów potęg (a więc i bardzo dużych liczb) w prostszych postaciach, a zatem i łatwiejszych do obliczeń.

Źródło: Cheryl Graham, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- Udowodnisz wzór na logarytm potęgi.
- Zastosujesz wzór na logarytm potęgi przekształcając wyrażenia arytmetyczne.
- Zapiszesz logarytm pierwiastka w postaci iloczynu liczby wymiernej i logarytmu.
- Zapiszesz iloczyn liczby wymiernej przez liczbę zapisaną za pomocą logarytmu, w postaci logarytmu potęgi.

Przeczytaj

Podamy teraz i udowodnimy **twierdzenie o logarytmie potęgi** bardzo przydatne w obliczeniach, szczególnie w naukach technicznych i w astronomii, gdzie często zachodzi konieczność potęgowania dużych liczb.

We wszystkich obliczeniach w tym materiale uwzględniać będziemy założenia wynikające z definicji logarytmu – podstawa logarytmu musi być liczbą dodatnią, różną od jedności, liczba logarytmowana musi być dodatnia. Pamiętajmy również, że wyrażenie 0^0 jest nieoznaczone.

Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczba x jest liczbą dodatnią i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Założenie:

$a > 0, a \neq 1$ – podstawa logarytmu,

$x > 0$ – liczba logarytmowana,

$p \in \mathbb{R}$ – wykładnik potęgi.

Teza:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Oznaczmy: $\log_a x = k$.

Z definicji logarytmu wynika, że:

$$x = a^k$$

Podnosimy obie strony zapisanej równości do potęgi p .

$$x^p = (a^k)^p$$

Z twierdzenia o potędze potęgi wynika, że $(a^k)^p = a^{k \cdot p}$.

Stąd:

$$x^p = a^{k \cdot p}$$

Zatem $k \cdot p$ jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać x^p . Czyli:

$$\log_a x^p = k \cdot p = p \cdot k$$

Zastępujemy liczbę k odpowiednim logarytmem. Otrzymujemy tezę:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Co kończy dowód.

Możemy powiedzieć: **przy podstawie dodatniej i różnej od 1 logarytm potęgi liczby dodatniej jest równy iloczynowi wykładnika potęgi i logarytmu tej liczby przy tej samej podstawie.**

Zauważmy, że prawdziwy jest też wzór odwrotny.

$$p \cdot \log_a x = \log_a x^p$$

Przykład 1

Zapiszemy podane logarytmy potęg w postaci iloczynu liczby wymiernej i logarytmu.

$$\log_2 7^9 = 9 \cdot \log_2 7$$

$$\log_3 (5^3 \cdot 5^2) = \log_3 5^5 = 5 \cdot \log_3 5$$

$$\log_{0,1} 8^{-1} = -\log_{0,1} 8$$

$$\log_{\sqrt{3}} 10^{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7} \cdot \log_{\sqrt{3}} 10$$

Ważne!

W przypadku, gdy wykładnik potęgi liczby logarytmowanej jest liczbą naturalną większą bądź równą 2, wykładnik ten zwyczajowo oznacza się n .

Wzór zapisany w twierdzeniu o logarytmie potęgi można wówczas zapisać w postaci:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Przykład 2

Zapiszemy podane liczby bez użycia logarytmów.

$$\log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\log 100^{100} = 100 \cdot \log 10^2 = 200 \cdot \log 10 = 200 \cdot 1 = 200$$

$$\log_5 125^{-2} = \log_5 5^{-6} = -6 \cdot 1 = -6$$

Przykład 3

Zapiszemy każdy z iloczynów w postaci logarytmu potęgi, a następnie w postaci logarytmu pewnej liczby.

$$3 \cdot \log 5 = \log 5^3 = \log 125$$

$$2 \cdot \log_3 4 = \log_3 4^2 = \log_3 16$$

$$-5 \cdot \log_7 2 = \log_7 2^{-5} = \log_7 \frac{1}{32}$$

Wiemy, że obliczanie pierwiastka stopnia n (n – liczba naturalna taka, że $n \geq 2$) liczby dodatniej jest szczególnym przypadkiem potęgowania.

Prawdziwa więc jest podana niżej wersja twierdzenia o logarytmie potęgi.

Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie pierwiastka

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczba x jest liczbą dodatnią i n jest liczbą naturalną taką, że $n \geq 2$, to:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

Przykład 4

Zapiszemy podane liczby bez użycia symbolu pierwiastka.

$$\log_{11} \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \log_{11} 8$$

$$\log_3 \sqrt[3]{81} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 81 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$$

$$\log_2 \sqrt[7]{8} = \frac{1}{7} \cdot \log_2 8 = \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$$

Przykład 5

Zapiszemy podane liczby w postaci logarytmu pierwiastka.

$$\frac{1}{2} \cdot \log 5 = \log \sqrt{5}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \log_2 10 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 10^2 = \log_2 \sqrt[3]{100}$$

$$-\frac{3}{2} \cdot \log 7 = \log 7^{-\frac{3}{2}} = \log \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^3}$$

Zastosujemy teraz poznane twierdzenia do przekształcania wyrażeń arytmetycznych.

Przykład 6

Zapiszemy każde z wyrażeń w najprostszej postaci. W tym celu skorzystamy również z twierdzeń o logarytmie iloczynu i logarytmie ilorazu.

$$6 \cdot \log 2\sqrt{5} - 2 \cdot \log 2 = \log \frac{8000}{4} = \log 2000 = \log(2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 = \log 2 + 3$$

$$2 \cdot \log_4 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \log_4 9 = \log_4 \frac{48}{3} = \log_4 16 = 2$$

$$\log_{12} 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \log_{12} 36 - \log_{12} 2 = \log_{12} \left(\frac{24}{2}\right) = \log_{12} 12 = 1$$

Przykład 7

Znajdziemy liczbę x taką, że $1 - 3 \cdot \log 3 + \log x^2 + \log 54 = 3 - \frac{1}{4} \cdot \log 16 + \log x$.

Zapisujemy liczby 1 i 3 za pomocą logarytmów oraz liczbę $(3 \cdot \log 3)$ za pomocą logarytmu potęgi.

$$\log 10 - \log 3^3 + \log x^2 + \log 54 = \log 1000 - \log 2 + \log x$$

Zapisujemy wyrażenia z niewiadomą po lewej stronie równości. Pozostałe wyrażenia zapisujemy po prawej stronie równości.

$$2 \cdot \log x - \log x = \log 1000 - \log 2 - \log 10 + \log 3^3 - \log 54$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu i z twierdzenia o logarytmie ilorazu.

$$\log x = \log \frac{1000 \cdot 27}{2 \cdot 10 \cdot 54}$$

$$\log x = \log 25$$

Porównujemy liczby logarytmowane - korzystając z różnowartościowości funkcji logarymicznej.

$$x = 25$$

Liczba 25 jest dodatnia (liczba logarytmowana musi być dodatnia), zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 25.

Przykład 8

Wiedząc, że $\log_2 3 = m$ obliczymy $K = \log_2 \sqrt{13,5} + \log_2 \sqrt[3]{9}$.

Zapisujemy w pierwszym ze składników liczbę podpierwiastkową w postaci ułamka, który następnie skracamy. W drugim składniku liczbę podpierwiastkową zapisujemy w postaci potęgi.

$$K = \log_2 \sqrt{\frac{135}{10}} + \log_2 3^{\frac{2}{3}} = \log_2 \sqrt{\frac{27}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \log_2 3$$

Zapisujemy logarytm ilorazu w postaci różnicy logarytmów.

$$K = \log_2 \sqrt{27} - \log_2 \sqrt{2} + \frac{2}{3} \cdot \log_2 3$$

Ponieważ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}}$ i $\log_2 2 = 1$, stąd

$$K = \frac{1}{2} \cdot \log_2 27 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{2}{3} \cdot \log_2 3 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3^3 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \log_2 3$$

Podstawiając $\log_2 3 = m$, otrzymujemy

$$K = \frac{3}{2}m - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}m = 2\frac{1}{6}m - \frac{1}{2}$$

Słownik

twierdzenie o logarytmie potęgi

jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczba x jest liczbą dodatnią i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. W zapisie i dowodzie twierdzenia o logarytmie potęgi użyliśmy tu nieco innych oznaczeń, niż w podobnym materiale w sekcji „Przeczytaj”. Zastanów się, dlaczego.


Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1EfX2uey>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej logarytmu potęgi.

Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi, to $\log xy + (\log x^2 y^2 - \log x^3 y^3) = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wiadomo, że $\log_2 7 = a$ i $\log_2 3 = b$. Wykaż, że
 $3 \cdot \log_2 \sqrt[3]{49} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 9 + \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 = 2a + b$.

Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10



Ćwiczenie 11



Ćwiczenie 12



Ćwiczenie 13



Ćwiczenie 14



Ćwiczenie 15



Ćwiczenie 16



Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Logarytm potęgi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udowadnia wzór na logarytm potęgi
- stosuje wzór na logarytm potęgi przekształcając wyrażenia arytmetyczne
- zapisuje iloczyn logarytmu i liczby wymiernej w postaci logarytmu potęgi
- łączy umiejętności z kilku działów matematyki, ustalając strategię rozwiązania zadania logarytmicznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika Ishikawy

- porównania binarne
- wyścig biedronek

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, pracując w grupach, korzystając z techniki Ishikawy przedstawiają graficznie zależności między definicją logarytmu a poznanymi wzorami ułatwiającymi obliczenia logarytmiczne.
2. Przedstawiciele grup krótko przedstawiają rezultaty prac grup.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach pracują metodą porównań binarnych, starając się na podstawie znanych wzorów wyprowadzić i uzasadnić wzór na logarytm potęgi. Przy czym każda para powinna znaleźć co najmniej dwa sposoby dojścia do celu i opracować tabelę porównań tych sposobów.
2. Po wypełnieniu tabeli, pary porównują swoje zapisy z odpowiednimi zapisami w sekcji „Przeczytaj”. I ewentualnie modyfikują swoje ustalenia. Następnie analizują przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj” i filmie samouczku.
3. Ochotnicy przedstawiają rezultaty swojej pracy – zwracają uwagę na popełnione błędy, ale też nieszablonowe pomysły, dzielą się przemyśleniami na temat trafności propozycji twierdzenia i jego dowodów.

Faza podsumowująca:

1. Podsumowaniem zajęć jest wyścig biedronek. Uczniowie pracują nadal w parach, rozwiązując na przemian ćwiczenia interaktywne. Każda „biedronka” posiada początkowo 5 kropek. Jeśli dobrze rozwiąże zadanie, nie traci kropek, ale za każde błędne rozwiązanie traci jedną kropkę. Uczniowie którzy po zakończonym wyścigu nadal posiadają 5 kropek, mogą być nagrodzeni dobrymi ocenami.

2. Końcowy element to refleksje nauczyciela na temat pracy uczniów i ocena prac grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie w dostępnych źródłach informacji na temat zastosowania logarytmów w naukach przyrodniczych.

Materiały pomocnicze:

[Działania na logarytmach – Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek jest dobrym materiałem do krótkiego powtórzenia materiału na początku lekcji poświęconej zastosowaniu logarytmów w innych dziedzinach wiedzy.