

Równość wielomianów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równość wielomianów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com.

Wielomiany to szczególny przypadek funkcji – pojęcia często pojawiającego się w matematyce szkolnej – to po prostu funkcje dane wzorem określonej postaci.

Co to znaczy, że dwie funkcje są równe? Jeśli obie zapiszemy po prostu tym samym wzorem, to równość jest oczywista – jasne jest, że jeżeli $f(x) = g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ to funkcje równe. Ale już równość funkcji $f(x) = \sqrt{x^2}$ i $g(x) = |x|$ należałoby uzasadnić, na przykład porównując dziedziny obu funkcji i ich wartości dla wszystkich argumentów.

Co zatem oznacza, że wielomiany są równe? Intuicyjnie wydaje się to raczej oczywiste. Ale jak zdefiniować to formalnie?

Twoje cele

- Poznasz formalnie określoną definicję równości wielomianów jednej zmiennej.
- Określisz, w jakich przypadkach wielomiany zapisane wzorami z parametrem mogą być równe.
- Wykorzystasz porządkowanie wielomianów do zweryfikowania równości wielomianów zapisanych w różnych postaciach.

Przeczytaj

Definicja: Wielomiany równe

Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami równymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$W(x) = P(x)$$

Równość wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ można równoważnie sformułować następująco:

- Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są tego samego stopnia.
- Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ mają po uporządkowaniu równe współczynniki przy odpowiednich potęgach niewiadomej x .

Poniższe wielomiany są wielomianami równymi:

- $W(x) = (2x - 3)^3$
- $P(x) = x[x(8x - 36) + 54] - 27$
- $Q(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Częstym typem zadań, w których rozwiązywaniu wykorzystuje się [równość wielomianów](#), są zadania z parametrami.

Przykłady poniżej pokazują metody rozwiązywania tego typu zadań.

Przykład 1

Dane są [wielomiany](#) $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$ oraz $Q(x) = (x - 2)(x + 3)(cx + d)$. Dla jakich wartości parametrów a , b , c i d są to wielomiany równe?

- Przedstawmy wielomian $Q(x)$ w postaci sumy:
- $$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 + x - 6)(cx + d) = \\ &= cx^3 + cx^2 - 6cx + dx^2 + dx - 6d = \\ &= cx^3 + (c + d)x^2 + (d - 6c)x - 6d \end{aligned}$$
- Z porównania współczynników przy x^3 wiemy, że $c = 2$.
- Z porównania [wyrazów wolnych](#) wiemy, że $-6d = 30$, więc $d = -5$.
- Z porównania współczynników przy x^2 mamy $a = c + d = -3$.

- Z porównania współczynników przy x uzyskujemy $b = d - 6c = -17$.

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru m wielomiany

$$F(x) = (2m^2 - 2m - 12)x^5 - mx^3 + (3m^2 + 15m + 18)x$$

$$\text{i } G(x) = (3m^2 - 3m - 18)x^5 - mx^3 + (4m^2 + 9m + 2)x$$

są wielomianami równymi? Jakiego stopnia wielomian wtedy uzyskamy?

- Porównajmy współczynniki przy x^5 :
- $2m^2 - 2m - 12 = 3m^2 - 3m - 18$.
- Po uproszczeniu uzyskujemy równanie kwadratowe $-m^2 + m + 6 = 0$, które ma dwa rozwiązania: $m = -2 \vee m = 3$ - tylko dla tych dwóch wartości m współczynniki przy x^5 będą równe.
- Współczynniki przy x^3 w obu wielomianach są jednakowe.
- Pozostało jeszcze przeanalizowanie współczynników przy x . Można je porównać (podobnie jak współczynniki przy x^5) albo po prostu podstawić $m = -2 \vee m = 3$ - co może być szybsze.
- Dla $m = -2$ mamy $3m^2 + 15m + 18 = 0$ i $4m^2 + 9m + 2 = 0$ - czyli wielomiany będą równe.
- Dla $m = 3$ mamy $3m^2 + 15m + 18 = 90$ oraz $4m^2 + 9m + 2 = 65$, czyli wielomiany nie są równe.
- Podsumowując: $F(x)$ i $G(x)$ są wielomianami równymi dla $m = -2$.
- Wtedy współczynnik przy x^5 wynosi 0 i $F(x) = G(x) = 2x^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia.

Słownik

równość wielomianów

wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami równymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$W(x) = P(x)$$

równość wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ można równoważnie sformułować następująco:

- wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są tego samego stopnia;

- wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ mają po uporządkowaniu równe współczynniki przy odpowiednich potęgach niewiadomej x

wielomian

wyrażenie, które jest sumą jednomianów (lub jednomianem);

wielomian można zapisać w postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

wyraz wolny wielomianu

składnik wielomianu, w którym nie występuje niewiadoma

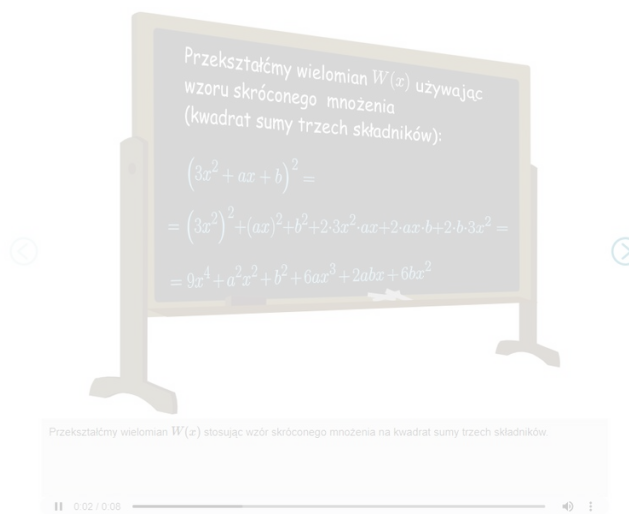
Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Dane są wielomiany $W(x) = (3x^2 + ax + b)^2$ oraz $P(x) = 9x^4 + 12x^3 + cx^2 + dx + 25$.

Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d wielomiany te są równe?

- Poniższa prezentacja pokazuje, jak możesz to sprawdzić.






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8GpP9mwe>

Polecenie 2

Wiadomo, że wielomiany $W(x) = (mx - n)^3$ oraz $P(x) = px^3 + qx^2 + 25x + 125$ są wielomianami równymi. Ustal wartości parametrów m, n, p oraz q .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Ustal, dla jakich wartości parametrów p i q wielomian

$W(x) = x^4 + px^3 - x^2 + qx + 1$ jest kwadratem innego wielomianu.

Rozwiąż zadanie na kartce i sprawdź odpowiedź.

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równość wielomianów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza, czy dane wielomiany jednej zmiennej są równe;
- wyznacza wartości parametrów, dla których dane wielomiany są równe;
- wśród wielomianów zapisanych w różnych postaciach wskazuje wielomiany równe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem przewodnim;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Prezentacja multimedialna” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym przykładem zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Uczniowie zapoznają się z prezentacją multimedialną i samodzielnie rozwiązują polecenia z nią związane.
3. Uczniowie wykonują w grupach zadania numer 1–5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6–8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Równość wielomianów” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadanie analogiczne do ćwiczenia 6 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Jednomiany i sumy algebraiczne](#)
- [Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać prezentację multimedialną do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania.