



Objętość sześcianu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Każde naczynie ma swoją objętość, podajemy ją zwykle w litrach. Zużycie wody mierzy się w metrach sześciennych. Czy zastanawiałeś się kiedyś, skąd biorą się takie jednostki? Litrami to objętość sześcianu o krawędzi 1 dm, metr sześcienny, decymetr sześcienny, centymetr sześcienny to objętość sześcianu o krawędzi 1 m, 1 dm, 1 cm odpowiednio. Umiejętność liczenia objętości sześcianu jest więc podstawą do zrozumienia i wyobrażenia sobie stosunków ilościowych w otaczającej nas rzeczywistości.

Twoje cele

- Obliczysz objętość sześcianu o krawędzi, przekątnej ściany, przekątnej bryły danej długości.
- Ocenisz jak zmienia się objętość sześcianu przy zmianie długości odcinków w tym sześcianie.
- Obliczysz długości odcinków w sześcianie znając jego objętość.

Przeczytaj

Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się wzorem:

$$V = a^3$$

Przykład 1

Niech będzie dany sześcian o **przekątnej ściany** bocznej p . Wyrazimy objętość sześcianu za pomocą długości tej przekątnej.

Rozwiązanie

Mamy $p = a\sqrt{2}$.

Czyli $a = \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{p\sqrt{2}}{2}$.

A zatem $V = \left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2p^3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}p^3$.

Oczywiście, jeżeli zwiększymy (odpowiednio zmniejszymy) krawędź sześcianu to jego objętość również się zwiększy (odpowiednio zmniejszy).

Przykład 2

Sprawdźmy, jak zmieni się objętość sześcianu, którego krawędź zmniejszymy trzykrotnie.

Rozwiązanie

Oznaczmy krawędź początkowego sześcianu przez a .

Wówczas objętość tego sześcianu wynosi $V_1 = a^3$.

Krawędź zmniejszonego sześcianu wynosi więc $\frac{1}{3}a$, a zatem objętość tego sześcianu wynosi $V_2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \frac{1}{27}a^3 = \frac{1}{27}V_1$.

Czyli objętość sześcianu zmniejszyła się 27-krotnie.

Zauważmy, że jeżeli zwiększymy (odpowiednio zmniejszymy) krawędź sześcianu k -krotnie, to jego objętość zwiększy się (odpowiednio zmniejszy się) k^3 -krotnie.

Znając objętość sześcianu możemy obliczyć długości odcinków w tym sześcianie.

Przykład 3

Obliczymy sumę długości krawędzi sześcianu, którego objętość wynosi $81\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $81\sqrt{3} = 27 \cdot 3\sqrt{3} = (3)^3 \cdot (\sqrt{3})^3 = (3\sqrt{3})^3$.

Mamy więc $a^3 = (3\sqrt{3})^3$.

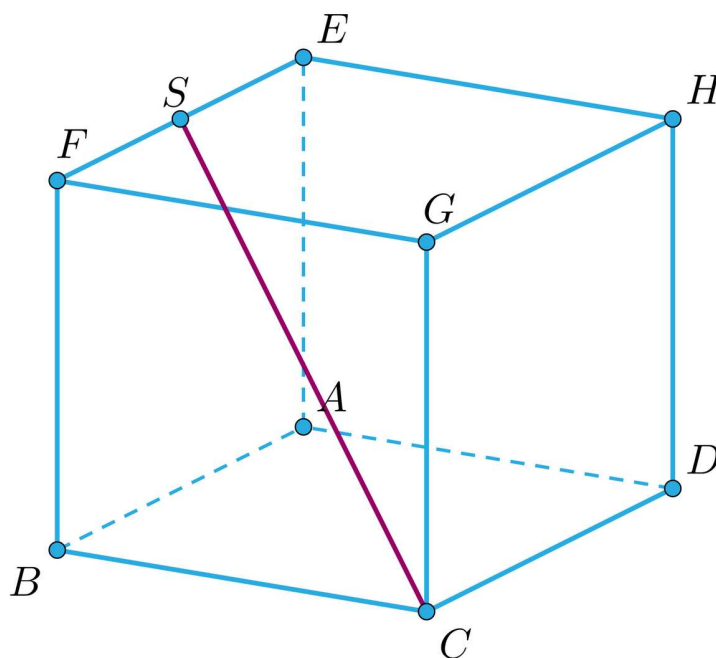
A stąd $a = 3\sqrt{3}$.

Suma długości krawędzi tego sześcianu wynosi więc $12a = 36\sqrt{3}$.

Objętość sześcianu można również obliczyć, mając daną długości odcinków lub miary kątów w sześcianie.

Przykład 4

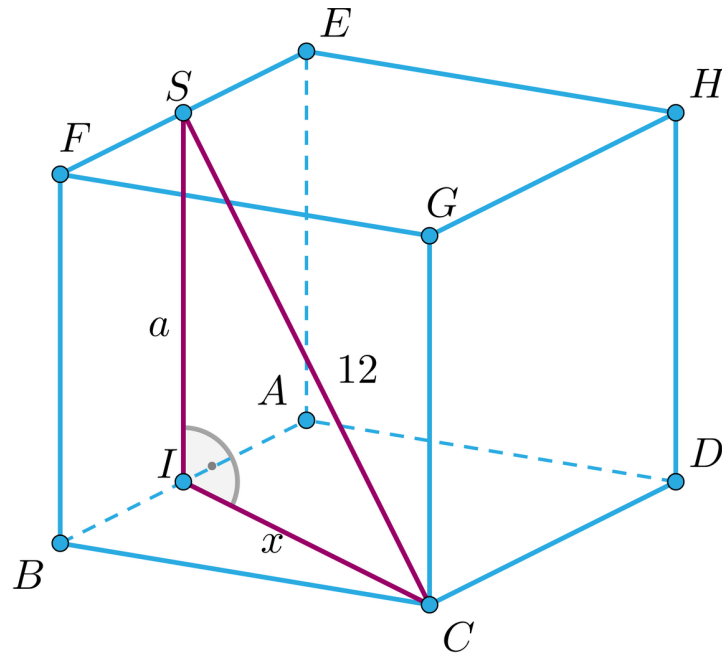
Odcinek CS zaznaczony w sześcianie na rysunku ma długość 12. Punkt S jest środkiem krawędzi FE .



Obliczymy objętość tego sześcianu.

Rozwiązanie

Zrzutujemy punkt S na podstawę.



Powstały trójkąt SIC jest prostokątny.

Obliczymy najpierw długość x w zależności od a .

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta IBC .

Mamy zatem $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = x^2$.

Czyli $x^2 = \frac{5}{4}a^2$, a stąd $x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Obliczymy teraz długość krawędzi sześcianu a z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SIC :
 $a^2 + \frac{5}{4}a^2 = 12^2$.

A zatem $\frac{9}{4}a^2 = 144$.

Mamy więc $a^2 = 64$ i ostatecznie $a = 8$.

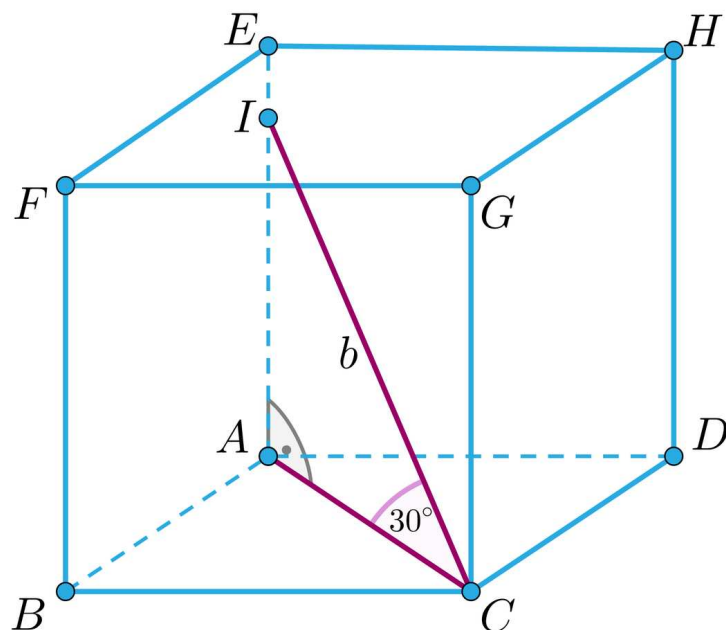
Objętość sześcianu wynosi $V = 8^3 = 512$.

Przykład 5

Na krawędzi AE sześcianu $ABCDEFGH$ wybrano punkt I w taki sposób, że $|\angle ACI| = 30^\circ$. Wiemy, że $|CI| = b$. Wyznamy objętość sześcianu w zależności od b .

Rozwiązanie

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Trójkąt ACI jest prostokątny.

Możemy skorzystać z funkcji trygonometrycznych, aby obliczyć długość AC w zależności od b .

Mamy więc $\cos 30^\circ = \frac{|AC|}{b}$.

A stąd $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AC|}{b}$ i ostatecznie $|AC| = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Obliczmy długość krawędzi sześcianu.

Wiemy, że $|AC| = |AB|\sqrt{2}$. Czyli $|AB| = \frac{|AC|\sqrt{2}}{2}$.

Podstawiając w miejsce $|AC|$ wcześniejsze wyrażenie mamy $|AB| = \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{6}}{4}$.

Możemy już obliczyć objętość tego sześcianu w zależności od b :

$$V = \left(\frac{b\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{b^3 \cdot 6\sqrt{6}}{64} = \frac{3b^3\sqrt{6}}{32}.$$

Słownik

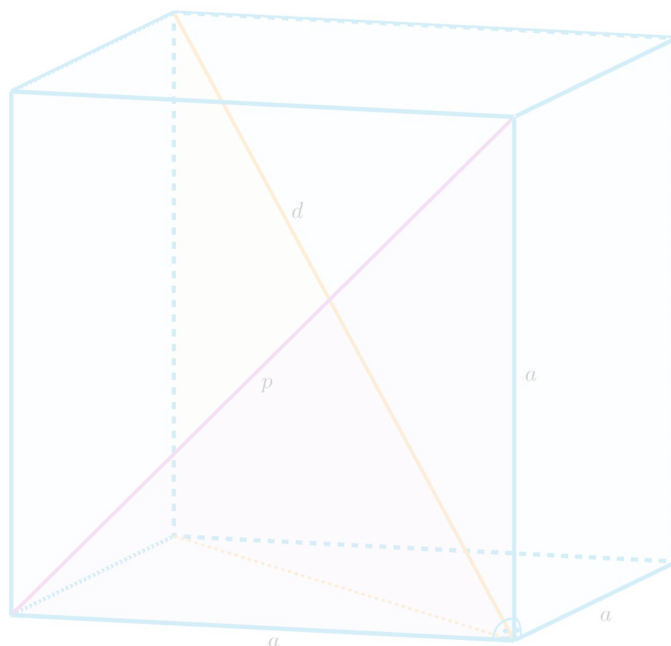
przekątna ściany

odcinek łączący dwa wierzchołki tej samej ściany nie będący jej krawędzią

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

W symulacji interaktywnej za pomocą suwaka zmień wielkość sześcianu. Obserwuj, jak zmieniają się długości przekątnej ściany sześcianu i przekątnej sześcianu oraz jego objętość.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DSchc9e8n>

Polecenie 2

Zaznacz widoczność tylko jednego z parametrów (np. objętości) i spróbuj obliczyć wartość pozostałych. Następnie za pomocą pola wyboru zmień widoczność pozostałych parametrów i sprawdź, czy twoje wyniki są prawidłowe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Objętość sześcianu o krawędzi równej 2 cm jest o 19 cm^3 mniejsza od objętości sześcianu o krawędzi 3 cm.

☐

Jeżeli krawędź sześcianu zwiększymy dwukrotnie, to objętość zwiększy się dwukrotnie.

☐

Jeżeli objętość sześcianu wynosi 36, to długość krawędzi sześcianu jest liczbą niewymierną.

☐

Objętość sześcianu o przekątnej sześcianu równej d wynosi $d\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2



Ustaw sześciany w kolejności od największej do najmniejszej objętości:

Sześcian o krawędzi długości 4 cm.



Sześcian o przekątnej ściany długości 6 cm.



Sześcian o przekątnej bryły długości 6 cm.



Ćwiczenie 3



Przekątna sześcianu ma długość 9. Ile wynosi objętość tego sześcianu? Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych i wpisz w odpowiednie pola.

$V =$, cm^3 .

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Objętość sześcianu zwiększyła się 16 razy. Tym samym jego krawędź zwiększyła się:

☐ Więcej niż dwa, ale mniej niż 4 razy.

☐ Czterokrotnie.

☐ Więcej niż 4 razy.

☐ Dwukrotnie.

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Objętość sześcianu wynosi $250\sqrt{2}$. Jaką długość ma przekątna tego sześcianu:

☐ $5\sqrt{3}$

☐ 10

☐ $5\sqrt{2}$

☐ $5\sqrt{6}$

Ćwiczenie 6



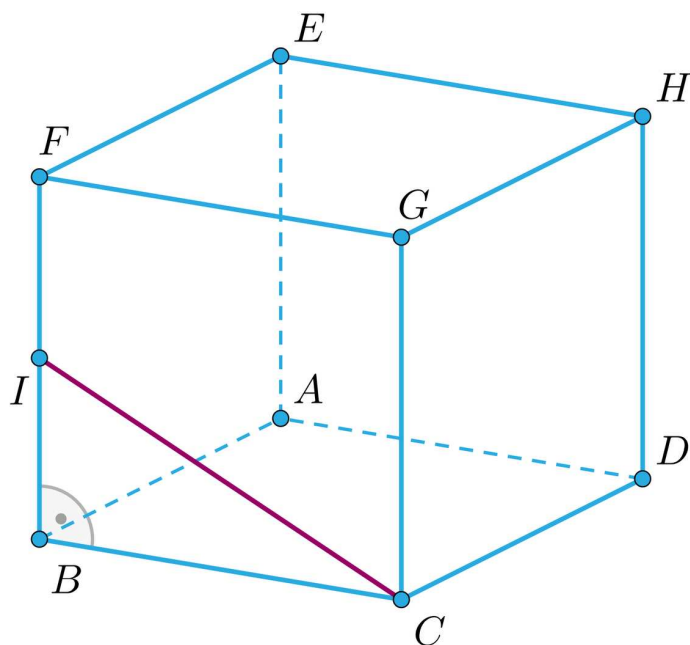
Krawędź sześcianu zmniejszyła się o 30%. O ile procent zmniejszyła się jego objętość? Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych i wpisz w odpowiednie pola.

Objętość sześcianu zmniejszyła się o: , %.

Ćwiczenie 7



Punkt I jest środkiem odcinka BF . Odcinek IC ma długość $\sqrt{10}$. Oblicz objętość sześcianu $ABCDEFGH$.



Ćwiczenie 8



Ile wynosi długość krawędzi sześcianu, jeżeli wydłużenie jej o 2 cm spowoduje zwiększenie objętości sześcianu o 386 cm^3 ?

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość sześcianu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość sześcianu mając daną długość krawędzi przekątnej ściany, przekątnej sześcianu
- oblicza długości odcinków w sześcianie mając daną jego objętość
- analizuje zmianę objętości sześcianu przy zmianie długości odcinków w sześcianie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca
- dyskusja

- metoda Walizki i Kosza

Formy pracy:

- praca z całą klasą
- praca w parach
- praca indywidualna

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- modele wykonane przez uczniów
- przezroczyste modele sześciianów z zaznaczonymi odcinkami

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przypomina zależności pomiędzy długościami odcinków w sześcianie.
2. Nauczyciel wraz z uczniami metodą burzy mózgów wymieniają zastosowanie objętości w życiu codziennym.
3. Nauczyciel tłumaczy związek jednostek objętości z objętością sześcianu.
4. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje uczniom symulację interaktywną. Pokazuje jak znając jeden z parametrów obliczyć pozostałe.
2. Uczniowie w parach znajdują wartości pozostałych parametrów, gdy znają jeden z nich. Najlepiej, gdyby każda para mogła wybierać indywidualnie parametr i jego wielkość na dostępnym sprzęcie.
3. Nauczyciel przeprowadza dyskusję na temat tego, jak się zmienia objętość sześcianu przy zmianie jego krawędzi. Prezentuje Przykład 2 z sekcji „Przeczytaj”.
4. Uczniowie (w razie potrzeby nauczyciel przedstawia wniosek, który znajduje się w sekcji „Przeczytaj”) formułują wniosek dotyczący zmiany objętości i krawędzi sześcianu.
5. Uczniowie samodzielnie wykonują ćwiczenie 4 z sekcji „Sprawdź się”, następnie sprawdzają poprawność odpowiedzi.
6. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy ćwiczenia otwarte z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wykonują Ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Uczniowie dokonują ewaluacji np. metodą Walizki i Kosza.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Objętość prostopadłościanu](#)
- [Objętość prostopadłościanu](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać symulację interaktywną w domu jako utrwalenie materiału.