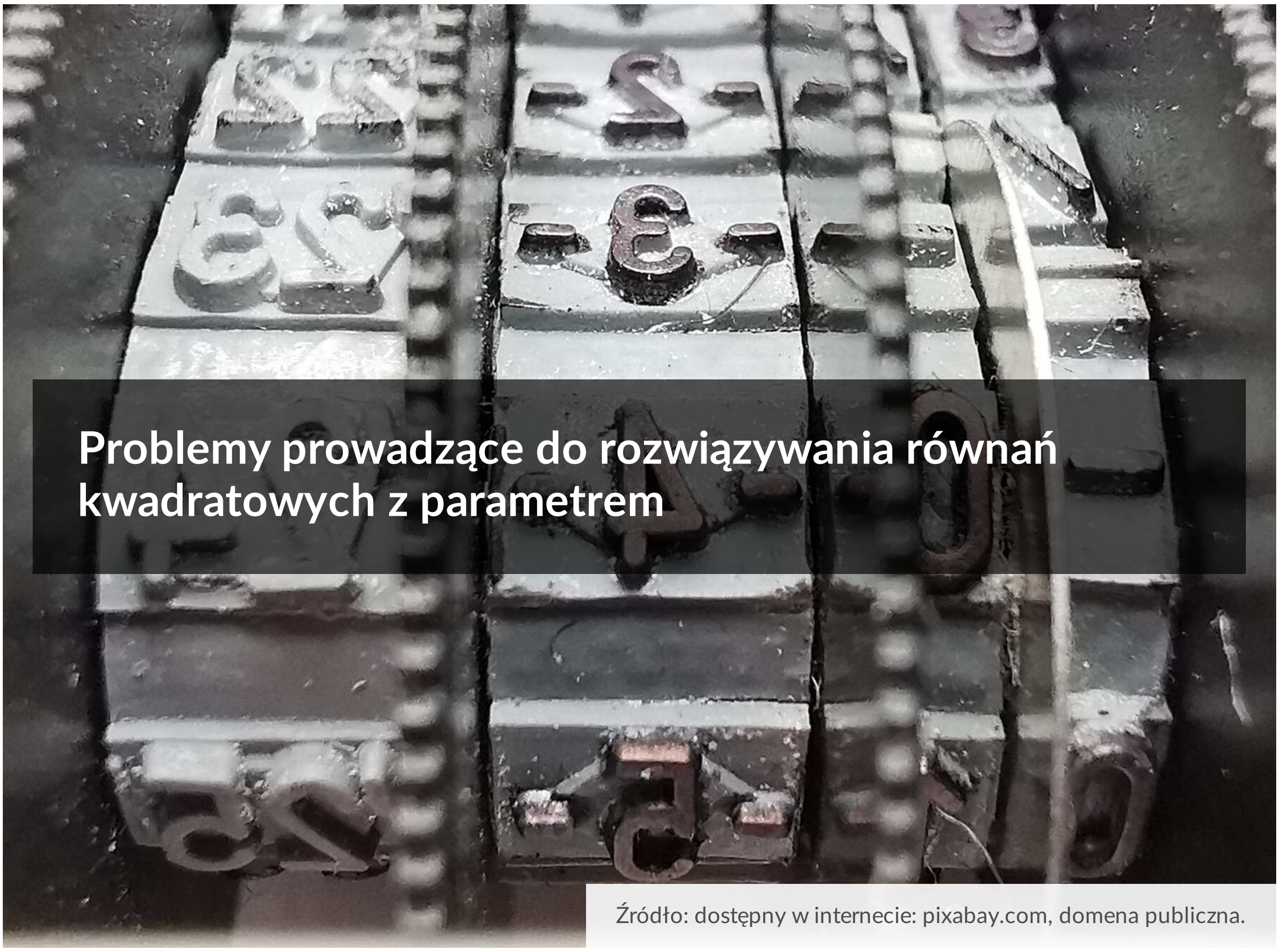
Problemy prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem



Problemy prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się problemami prowadzącymi do rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem. Przeprowadzimy analizę położenia wykresu funkcji kwadratowej w zależności od parametru występującego we wzorze funkcji. Pokażemy również wykorzystanie równań kwadratowych z parametrem w innych działach matematyki – na przykład w trygonometrii.

> **Twoje cele**
>
> - Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby rozwiązania danego równania spełniały określony warunek.
> - Wyznaczysz takie wartości parametru, aby wykres funkcji kwadratowej spełniał określony warunek.

Przeczytaj

Wzory Viete’a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Wzory Viete’a są bardzo często wykorzystywane podczas rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem.

W materiale wykorzystamy również własności funkcji kwadratowej i jej wykresu.

Twierdzenie: Współrzędne wierzchołka paraboli

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ (gdzie liczba a jest różna od zera) ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

gdzie:
$\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeżeli parabola ma wierzchołek w punkcie $(p,\ q)$ to jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Przykład 1

Wykażemy, że równanie $kx^2 + (k+3)x + 3 = 0$ ma rozwiązanie dla dowolnej wartości parametru $k \neq 0$.

$kx^2 + (k+3)x + 3 = 0$

Aby równanie kwadratowe miało rozwiązanie $\Delta \geq 0$.

$\Delta = (k+3)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = k^2 + 6k + 9 - 12k = k^2 - 6k + 9 = (k-3)^2$

$(k-3)^2 \geq 0$ dla $k \in \mathbb{R}$, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny.

Czyli dla $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ równanie ma rozwiązanie.

Przykład 2

Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 4$ i $g(x) = -3x^2 + 2px$. Obliczymy, dla jakich wartości parametru p parabole, będące wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$ przecinają się w jednym punkcie, który znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Rozważymy równanie $x^2 + 4 = -3x^2 + 2px$.

$4x^2 - 2px + 4 = 0$

Aby równanie miało jedno rozwiązanie $\Delta = 0$.

$\Delta = (2p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4p^2 - 64$

$4p^2 - 64 = 0$

$p^2 - 16 = 0$

$p = -4$ lub $p = 4$

Dla $p = -4$ otrzymujemy:

$4x^2 - 2 \cdot (-4)x + 4 = 0$

$4x^2 + 8x + 4 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x + 1)^2 = 0$

$x = -1$

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu jest liczbą ujemną, więc punkt nie leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Dla $p = 4$ otrzymujemy:

$4x^2 - 8x + 4 = 0$

$4x^2 - 8x + 4 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$

$f(1) = 1^2 + 4 = 5$

Ponieważ obie współrzędne punktu przecięcia wykresów są dodatnie, oznacza to, że dla $p = 4$ punkt leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Przykład 3

Obliczymy, dla jakich wartości parametru z funkcja $f(x) = 2x^2 + (z - 1)x + z$ przyjmuje najmniejszą wartość, która jest liczbą ujemną.

$f(x) = 2x^2 + (z - 1)x + z$

Funkcja kwadratowa przyjmuje najmniejszą wartość, gdy współczynnik $a > 0$.

Dla funkcji f mamy $a = 2 > 0$ dla $z \in \mathbb{R}$.

Funkcja kwadratowa przyjmuje najmniejszą wartość w wierzchołku paraboli, będącej wykresem funkcji.

Czyli $q = \frac{-\Delta}{4a}$ jest najmniejszą wartością funkcji f.

$\Delta = (z - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot z = z^2 - 2z + 1 - 8z = z^2 - 10z + 1$

$q = \frac{-(z^2 - 10z + 1)}{4 \cdot 2} = \frac{-(z^2 - 10z + 1)}{8}$

Najmniejsza wartość funkcji f będzie liczbą ujemną dla $\frac{-(z^2 - 10z + 1)}{8} < 0 \; \Big| \cdot (-8)$.

$z^2 - 10z + 1 > 0$

$\Delta_z = 100 - 4 \cdot 1 = 96$

$\sqrt{\Delta_z} = \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6}$

$z_1 = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$

$z_2 = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$

$z \in \left(-\infty,\ 5 - 2\sqrt{6}\right) \cup \left(5 + 2\sqrt{6},\ \infty\right)$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 + (k - 1)x + 2k - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania takie, że jedno jest sinusem a drugie jest cosinusem tego samego kąta?

Niech $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha$.

Rozwiążemy układ warunków:

$$\begin{cases} 1.\ \Delta \geq 0 \\ 2.\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

1. Wyróżnik trójmianu kwadratowego ma być liczbą nieujemną, ponieważ równanie może mieć podwójny pierwiastek ($\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ będą przyjmowały taką samą wartość).
$\Delta = (k-1)^2 - 4 \cdot (2k-1) = k^2 - 2k + 1 - 8k + 4 = k^2 - 10k + 5$
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow k^2 - 10k + 5 \geq 0$
$\Delta_k = (-10)^2 - 4 \cdot 5 = 100 - 20 = 80$
$\sqrt{\Delta_k} = 4\sqrt{5}$
$k_1 = \frac{10-4\sqrt{5}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$
$k_2 = \frac{10+4\sqrt{5}}{2} = 5 + 2\sqrt{5}$
$k \in \left(-\infty,\ 5 - 2\sqrt{5} > \cup < 5 + 2\sqrt{5},\ \infty\right)$

2. Aby zachodziły warunki zadania musi być spełniona „jedynka trygonometryczna”.
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$x_1^2 + x_2^2 = 1$
$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1$
$(k-1)^2 - 2 \cdot (2k-1) = 1$
$k^2 - 6k + 2 = 0$
$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 = 28$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
$k_1 = \frac{6-2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7} \notin \left(-\infty,\ 5 - 2\sqrt{5} > \cup < 5 + 2\sqrt{5},\ +\infty\right)$
$k_2 = \frac{6+2\sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7} \notin \left(-\infty,\ 5 - 2\sqrt{5} > \cup < 5 + 2\sqrt{5},\ \infty\right)$

Zatem nie istnieje wartość parametru k dla której równanie ma dwa rozwiązania takie, że jedno jest sinusem a drugie jest cosinusem tego samego kąta.

Słownik

wzory Viete'a

jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

jedynka trygonometryczna

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych i przeanalizuj sposób obliczenia liczby rozwiązań równania dwukwadratowego z parametrem.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4 - x^2 + 2m = 0$ ma cztery różne rozwiązania?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \left|(x+1)^2 - 2\right|$ i $g(x) = -(x+1)^2 + m$ mają nieskończenie wiele punktów wspólnych?

- $m = 2$
- $m = 1$
- $m = -1$
- $m = -2$

Ćwiczenie 2

Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Parabole $y = x^2 + 1$ i $y = -x^2 + 2kx$ mają jeden punkt wspólny, który leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Zatem $k =$ ______.

0 | -1 | 1 | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. Osią symetrii paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest oś Y. Zatem:

- $b = 0,\ c \in \mathbb{R}$
- $b = 1,\ c = 0$
- $b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$
- $b = 1,\ c = 1$

Ćwiczenie 4

Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Dla jakich wartości parametru z funkcja $f(x) = (z-2)x^2 + x - z$ przyjmuje najmniejszą wartość?

$z \in ($ ______ $, \infty)$

3 | $-2\frac{1}{4}$ | 2

Ćwiczenie 5

Równanie $x^2 + 4kx + k + 3 = 0$ ma dwa dodatnie rozwiązania x_1 i x_2. Połącz w pary warunek z rozwiązaniem.

$x_1 \cdot x_2 > 0$	$k \in (-3,\ \infty)$
$\Delta \geq 0$	$k \in (-\infty,\ 0)$
$a \neq 0$	$k \in \left(-\infty,\ -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \langle 1,\ +\infty)$
$x_1 + x_2 > 0$	$k \in \mathbb{R}$

Ćwiczenie 6

Wstaw odpowiednią liczbę.

Aby funkcja $f(x) = \left(k^2+1\right)x^2 + 4kx - 7$ była malejąca w przedziale $(-\infty,\ 1\rangle$, a rosnąca w przedziale $\langle 1,\ \infty)$ parametr $k =$ ______.

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4 - x^2 + (m+1) = 0$ ma cztery różne pierwiastki?

- $m \in (-1,\ \infty)$
- $m \in \left(-\infty,\ \frac{3}{4}\right)$
- $m \in \mathbb{R}$
- $m \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

Ćwiczenie 8

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{R}$ wykres funkcji $f(x) = (1-m)x^2 + mx - 1$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z osią X.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Problemy prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby rozwiązania danego równania spełniały określony warunek
- wyznacza takie wartości parametru, aby wykres funkcji kwadratowej spełniał określony warunek
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań kwadratowych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się wiadomościami dotyczącymi wyznaczania pierwiastków równania kwadratowego z parametrem, które przygotowali w domu.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj".
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują Polecenie 2 umieszczone pod galerią.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą potraktować jako materiał powtórzeniowy przed pracą klasową. Mogą też wykorzystać je jako wstęp do zajęć związanych z rozwiązywaniem nierówności kwadratowych z parametrem.